Prüfung POL

2020 — Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen — Reihe A

5 Fragen - 4 Stunden

1. Die mit bestimmten Fragen verbundenen Figuren sind illustrativ und nicht maßstabsgerecht. Es ist sinnlos, sie zu messen.
2. Lehrbücher und Taschenrechner sind nicht erlaubt.
3. Lassen Sie in Ihren Antworten Zahlen wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ in ihrer symbolischen Form.

Frage 1 (4 Punkte)

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$, so dass wir für jede komplexe Zahl $z = a+b\mathrm{i}$ mit $b = -2a$ haben:

$$|z - k + 7\mathrm{i}| = |z - 2 + 9\mathrm{i}|$$

(b) (2 Punkte) $-\mathrm{i}$ ist eine Wurzel aus $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Finde die anderen Wurzeln.

Frage 2 (4 Punkte) Ein Patient nimmt 10 mg eines Medikaments am ersten Tag und dann jeden Tag 5 mg. Tagsüber werden 40% der Medikamente im Körper abgebaut. Wir können die Mengen an Medikamenten, die sich unmittelbar nach der Einnahme des ersten, zweiten, dritten, ... Tages im Körper befinden, durch eine Reihe darstellen $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 Punkt) Geben Sie eine rekursive Formel für diese Folge ein.

(b) (1 Punkt) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass diese Folge nach oben begrenzt ist.

(c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die Folge steigt.

(d) (1 Punkt) Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge mit Hilfe der Rechenregeln des Grenzwertes.

Frage 3 (4 Punkte) Gegeben: $f(x) = x^3 + px - 1$.

(a) (2 Punkte) Welche Bedingung muss $p \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion kein Extremum hat?

(b) (2 Punkte) Welche Bedingung muss $p \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion ein Maximum und ein Minimum und drei verschiedene Nullpunkte hat? (Hinweis: was ist das Vorzeichen des Produkts der Funktionswerte im Maximum und Minimum, wenn es drei verschiedene Nullpunkte gibt?)

Frage 4 (4 Punkte)

(a) (1 Punkt) Demonstrieren Sie, dass für jede reelle Zahl x, wir die folgende Beziehung haben

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

(b) (1 Punkt) Leiten Sie eine Stammfunktion von der f-Funktion auf $\mathbb{R}$ ab, so dass

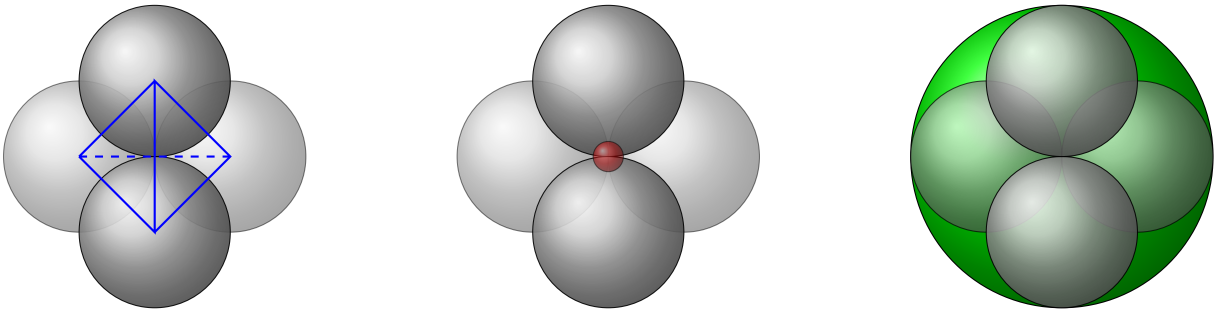
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 Punkt) a ist eine gegebene reelle Zahl ungleich Null, leiten Sie den Wert des Integrals

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx$$

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Frage 5 (4 Punkte) 4 Kugeln gleichen Radius r sind so gestapelt, dass die Mittelpunkte mit den Scheitelpunkten eines gleichseitigen Tetraeders mit Rippe $2r$ übereinstimmen. Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumen der kleinsten Kugel und der größten Kugel, die die 4 anderen Kugeln berühren.



(a) (1 Punkt) Berechnen Sie in dem Dreieck, das durch die Mittelpunkte der 3 unteren Kugeln gebildet wird, den Abstand vom Schwerpunkt zu einem Scheitelpunkt.

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie in dem Tetraeder, der durch die Mittelpunkte der 4 Kugeln gebildet wird, den Abstand vom Schwerpunkt (d.h. der Punkt, der gleich weit von den 4 Scheitelpunkten) zu einem Scheitelpunkt unter Verwendung vorigen Ergebnisses.

(c) (1 Punkt) Berechnen Sie das Volumen der größten Kugel (Zentrum in der vorigen Frage angegeben).

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie das Volumen der kleinsten Kugel (gleiches Zentrum) und berechnen Sie das Verhältnis beider Volumina.

Prüfung POL

2020 Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen Reihe B

5 Fragen - 4 Stunden

1. Die mit bestimmten Fragen verbundenen Figuren sind illustrativ und nicht maßstabsgerecht. Es ist sinnlos, sie zu messen.
2. Lehrbücher und Taschenrechner sind nicht erlaubt.
3. Lassen Sie in Ihren Antworten Zahlen wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3$, …, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … in ihrer symbolischen Form.

Frage 1 (4 Punkte)

(a) (2 Punkte) Demonstrieren Sie anhand der partiellen Integration (2 Mal), dass

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(n\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{n - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2 - 1}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie I_1 direkt mit einer Substitution von Variablen.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Formel in (a) für $n = 1$ den gleichen numerischen Wert wie das Ergebnis von (b) ergibt, wenn Sie den folgenden Limes berechnen

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - \sin\left(\frac{x\pi}{2}\right)}{x^2 - 1}$$

Frage 2 (4 Punkte)

(a) (2 Punkte) Wenn die Polynomfunktion $p(x)$ eine doppelt Nullstelle $x = x_1 = x_2$ hat (zweifacher Nullpunkt), dann ist x_1 auch eine Null von $p'\left(= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}p\right)$. Verwenden Sie $p(x) = (x - x_1)^2\, q(x)$, um dieses Theorem zu beweisen.

(b) (1 Punkt) Wenden Sie dieses Theorem auf die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ an, um zu beweisen, dass eine notwendige Bedingung für eine doppelte Nullstelle $b^2 = 4ac$ ist.

(c) (1 Punkt) Verwenden Sie das Theorem, um alle Nullen von $x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$ zu finden, wenn eine von ihnen eine doppelte Nullstelle ist.

Frage 3 (4 Punkte) Ein Wald hat die Form eines Dreiecks ABC, so dass $|AB| = 2|AC|$ und dessen Scheitelwinkel $\widehat{BAC}$ 120° misst. Ein gerader Weg AM durchquert den Wald entsprechend der Winkelhalbierenden des Winkels $\widehat{BAC}$. Dieser Weg hat eine Länge von 1 Kilometer.

(a) (1 Punkt) Demonstrieren Sie anhand des Sinusgesetzes, dass $|BM| = 2|CM|$.

(b) (1 Punkt) Schreiben Sie $|BM|$ und $|CM|$ als Funktion von $|BC|$ indem Sie das Kosinusgesetz verwenden.

(c) (1 Punkt) Berechnen Sie $|BC|$.

(d) (1 Punkt) Suchen Sie anhand der vorigen Ergebnisse $|AC|$.

Frage 4 (4 Punkte) Für jede natürliche Zahl n notieren wir A_n den Punkt in der komplexen Ebene, der der komplexen Zahl z_n entspricht, die durch z_n definiert ist:

$$z_0 = 1 \quad \text{und} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$$

Wir definieren die Sequenz (r_n) durch $r_n = |z_n|$ für jede natürliche Zahl n.

(a) (1 Punkt) Geben Sie die trigonometrische Form der Zahl $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ an.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Sequenz (r_n) einen geometrischen Qoutienten hat $\frac{\sqrt{3}}{2}$, indem Sie den Ausdruck von r_n finden in Funktion von n.

(c) (1 Punkt) Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} r_n$.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass das $\triangle OA_nA_{n+1}$ einen rechten Winkel in A_{n+1} hat.

Frage 5 (4 Punkte) Arnaud und Tibo haben jeweils zwei nicht-gefälschte vierseitige Würfel, wobei die vier Seiten mit 1, 2, 3, 4 nummeriert sind. Ohne hinzusehen, versucht Tibo, die Summe x der Zahlen auf den unteren Seiten der beiden Würfel von Arnaud zu erraten, nachdem sie auf einen Tisch geworfen wurden. Wenn seine Wette richtig ist, erhält Tibo x^2 EUR, wenn nicht, verliert er x EUR.

Bestimmen Sie Tibos erwarteten Gewinn pro Wurf von Arnaud's Würfeln, wenn er jede der folgenden Strategien anwendet:

(a) (1 Punkt) Er wählt nach dem Zufallsprinzip x im Intervall $2 \leq x \leq 8$ aus.

(b) (1 Punkt) Er wirft seine eigenen zwei Würfel und setzt darauf, dass x den gleichen Wert hat.

(c) (2 Punkte) Er nimmt Ihren Rat an und wählt immer den gleichen Wert für x. Welche Zahl würden Sie empfehlen?