Proef POL

2019 — Analyse - Ruimtemeetkunde - Rijen en reeksen - Complexe getallen — Reeks B

5 vragen - 4 uren

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 punt) Bereken I_0

(b) (1 punt) Bereken I_1

(c) (1 punt) Toon aan dat $\forall n \in \mathbb{N}_0$ er geldt dat $(3+2n)\,I_n = 2nI_{n-1}$

(d) (1 punt) Bereken I_5

Vraag 2 (4 punten) Gegeven: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) (1 punt) Bereken de limiet van f voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$

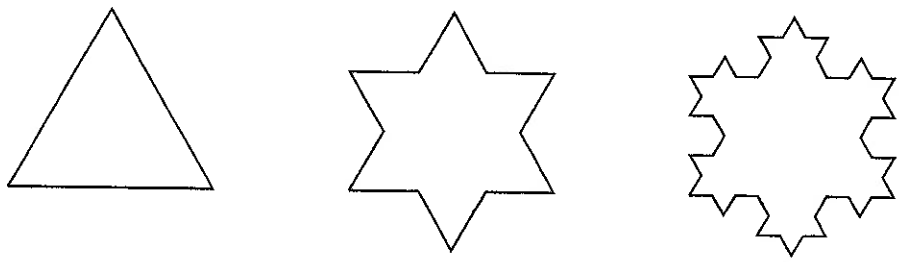
(b) (2 punten) Bereken de afgeleide van f en bewijs het volgende verband tussen f en zijn afgeleide f':

$$f'(x) = f(x)\,(1 - f(x))$$

(c) (1 punt) Stel $g(x) = 2f(x) - 1$. Bepaal het verband tussen g en g'.

Vraag 3 (4 punten) De Koch sneeuwvlok kan worden geconstrueerd door te beginnen met een gelijkzijdige driehoek en vervolgens elke zijde recursief als volgt aan te passen:

1. Verdeel het lijnstuk in drie even lange lijnstukken.
2. Teken een gelijkzijdige driehoek met als basis het middenste lijnstuk van stap 1.
3. Verwijder het lijnstuk dat de basis is van de driehoek uit stap 2.



1ste iteratie — 2de iteratie

De oppervlakte van de oorspronkelijk driehoek bedraagt 1.

(a) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na 1 iteratie.

(b) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na 2 iteraties.

(c) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na n iteraties.

(d) (1 punt) Wat is de limiet van de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na $n \to +\infty$ iteraties?

Vraag 4 (4 punten) Een toetsenbord heeft 42 toetsen waarvan 26 de letters van het alfabet voorstellen. De andere stellen cijfers of symbolen voor.

(a) (1 punt) De 3-jarige Arnaud drukt een willekeurige toets van het toetsenbord in, elke toets heeft dezelfde waarschijnlijkheid om ingedrukt te worden. Wat is de waarschijnlijkheid dat hij een letter van zijn naam heeft ingedrukt?

(b) Arnaud drukt achtereenvolgens 6 toetsen in, die al dan niet verschillende kunnen zijn, wat is de waarschijnlijkheid van volgende gebeurtenissen:

   i. (1 punt) Arnaud drukt 1 letter twee keer en 4 andere verschillende letters in;

   ii. (1 punt) Arnaud drukt zijn voornaam in;

   iii. (1 punt) Arnaud drukt zijn voornaam in, wetende dat hij 1 letter twee keer en 4 andere verschillende letters heeft ingedrukt.

Vraag 5 (4 punten) Gegeven: $A(3,2,1)$, $B(1,0,3)$ en

$$e : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

(a) (1 punt) De meetkundige plaats van alle punten C zodat het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$ op e ligt, is een cirkel met middelpunt $(1,1,1)$ en straal $\sqrt{5}$, gelegen in het vlak $\alpha : x - 2y - z + 2 = 0$. Bewijs.

(b) (1 punt) Bepaal het punt S van deze meetkundige plaats dat in $\beta : 2x + y + 2 = 0$ ligt.

(c) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van $\triangle ABS$.

(d) (1 punt) Bepaal $\tan \widehat{ASB}$.

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten) Gegeven het complex getal $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

(a) (1 punt) Bereken de modulus van het complexe getal $a - 1$

(b) (1 punt) Stel dat $z_0 = 1, \forall n \in \mathbb{R}_0 : z_n = a^n$ en $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Toon aan dat de rij (u_n) een geometrische rij is en bepaal de eerste term u_1 en de rede.

(c) (1 punt) Bereken de som $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(d) (1 punt) Bereken de limiet van s_n voor $n \to +\infty$, indien deze bestaat.

Vraag 2 (4 punten) Gegeven:

$$b : \frac{x - 4a - 1}{a} = \frac{y - 2a - 2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

(a) (1 punt) Bewijs $\forall a \in \mathbb{R}_0$: b en c zijn kruisend.

(b) (1 punt) Zoek een Cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat b omvat en evenwijdig is met d.

(c) (1 punt) Zoek een Cartesiaanse vergelijking van het vlak β dat c omvat en evenwijdig is met d.

(d) (1 punt) Toon aan dat de vlakken α en β altijd ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) snijdend zijn en dat de snijlijn door een vast punt gaat. Welk is dat punt?

Vraag 3 (4 punten) De kromming van een functie wordt als volgt gedefinieerd:

$$\left| \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \tag{1}$$

(a) (1 punt) Bereken de kromming van de functie $f(x) = \ln x$.

(b) (2 punten) Bereken de afgeleide van de kromming van f.

(c) (1 punt) Voor welke waarden van x is de kromming van f maximaal? Indien een maximum niet bestaat, bereken de limieten van de kromming aan de grenzen van het domein.

Vraag 4 (4 punten) Gegeven:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \equiv \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$$

(a) (1 punt) Bereken: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^1\,\mathrm{d}x$

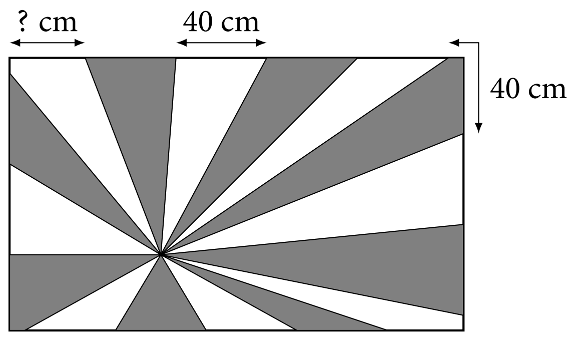
(b) (1 punt) Bereken: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\,\mathrm{d}x$

(c) (2 punten) Bewijs door volledige inductie: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$

Vraag 5 (4 punten) De vlag van Goed in Wiskunde is een rechthoek van 2 meter (horizontaal) bij 1,2 meter (verticaal). Een willekeurig punt strikt binnen de rechthoek wordt met de omtrek van de rechthoek om de 40 centimeter verbonden.

De aldus gevormde driehoeken en vierhoeken zijn afwisselend wit en grijs gekleurd. Het totaal van de grijze gebieden is groter dan het totaal van de witte gebieden: het verschil is precies een honderdste van het oppervlak van de rechthoek.

Van de linkerbovenhoek horizontaal naar rechts, hoe ver ga je naar de eerste kleurverandering (van wit naar grijs) in centimeters?



2016 **Bijkomende proef POL** **Reeks 2**

10 vragen

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten) Gegeven: de functie $f(x) = x \cdot e^{-x} + x$ en zijn grafiek.

(1) Toon dat de rechte d met vergelijking $y = x$ een asymptoot is voor $x \to +\infty$.

(2) Bespreek de ligging van de grafiek ten opzichte van de rechte d.

Vraag 2 (4 punten) Bereken

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 5x + 5) \cdot \cos(2x)\, dx.$$

Vraag 3 (4 punten)

(1) Bereken de afgeleide van de functie $f(x) = \tan^{n+1} x$.

(2) Bereken $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx,\ n \in \mathbb{N}_0$.

(3) Leid hieruit af dat geldt

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

Vraag 4 (4 punten) $z^3 + 2(1-i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0,\ m \in \mathbb{R}$ en $z \in \mathbb{C}$.

(1) Toon aan dat deze vergelijking een zuiver imaginair nulpunt heeft en bereken dit nulpunt.

(2) Bereken in functie van de reële parameter m ook de andere nulpunten.

Vraag 5 (4 punten) Los op in $\mathbb{R}$

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0.$$

Vraag 6 (4 punten) Gegeven: de vergelijking $X^2 - 4X - 12I_2 = 0$ met $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) Toon aan dat $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ een nulpunt is van deze vergelijking.

(2) Bereken een tweede nulpunt.

Vraag 7 (4 punten) Van een meetkundige rij met positieve factor (reden, ratio) r weet men dat de vijfde term gelijk is aan negen maal de derde term en dat de zesde term gelijk is aan 486.
Bereken de factor r en bereken de eerste term.

Vraag 8 (4 punten) In een urne bevinden zich tien witte en vijf rode ballen. Daaruit worden lukraak 3 ballen genomen die men niet terug legt.
Bereken de kans om tenminste een rode bal te trekken.

Vraag 9 (4 punten) Los op in $\mathbb{R}$:

$$2\sin^3 x + \cos^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$$

Vraag 10 (4 punten) Gegeven: de punten $A(1,-2,-3)$, $B(0,1,-2)$ en $C(-2,-5,1)$.

(1) Geef de cartesische vergelijking van het vlak α bepaald door de punten A, B en C.

(2) Een punt P ligt op de rechte OA en de afstand van het punt P tot het vlak α is gelijk aan 5.
Bereken de coördinaten van het punt P.

Bijkomende proef POL

2015 **10 vragen** **Reeks 3**

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, …, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten)

Gegeven: de functie (van de reële veranderlijke x)

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1-e^x}.$$

Bereken de extrema (minimum en/of maximum).

Vraag 2 (4 punten) Bereken

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{t \cdot (1-t)}\, dt.$$

Vraag 3 (4 punten) Gegeven: $I_n = \displaystyle\int_1^e \ln^n(x)\, dx,\ n \in \mathbb{N}_0.$

(1) Bereken I_2.

(2) Toon aan dat $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$.

Vraag 4 (4 punten) Gegeven: de veelterm $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

(1) Bepaal de reële getallen a, b en c zodat voor elk complex getal z geldt

$$P(z) = (z^2+3)(az^2+bz+c).$$

(2) Los op in $\mathbb{C}$: de vergelijking $P(z) = 0$.

Vraag 5 (4 punten) Los op in $\mathbb{R}$:

$$\ln(x^3 + x^2 - 2x) \ \geq\ 1 + \ln(x+2).$$

Vraag 6 (4 punten) Gegeven: de matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bereken $(A^{-1})^2$

Vraag 7 (4 punten) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ als en slechts als $|a| < 1$.

(1) Voor welke waarden van q zal $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln q)^n} \in \mathbb{R}$?

(2) Voor welke waarde van q zal $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\ln q)^n} = \frac{3}{2}$?

Vraag 8 (4 punten) Een urne bevat vier rode ballen en zes zwarte ballen.

De proef bestaat uit het gelijktijdig trekken van drie ballen uit de urne.
Bereken de kans dat men één zwarte en twee rode ballen trekt.

Vraag 9 (4 punten) Toon aan dat voor $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ geldt

$$\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Vraag 10 (4 punten) Gegeven: de rechten a en b en het vlak α

$$a : \begin{cases} x = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad b : \begin{cases} x = 1 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \alpha : x + z = 0.$$

De rechte c met richtingsgetallen $(1, 1, 0)$ snijdt de rechten a en b en heeft met het vlak α één punt P gemeen.
Gevraagd: bepaal de vergelijking van de rechte c en de coördinaten van het punt P.

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten)

Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x)

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2)$$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling).

Vraag 2 (3 punten) Bereken, beginnend met partiële integratie,

$$I = \int_0^\pi \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx.$$

Vraag 3 (3 punten) Stel $z_0, z_1, \ldots, z_5$ de nulwaarden van de vergelijking $z^6 - 1 = 0$.

Stel de oplossingen voor in het complexe getallenvlak.

Bereken dan alle mogelijke verschillende afstanden tussen de punten z_i en z_j met $i, j \in \{0, \ldots, 5\}$ en $i \neq j$.

Vraag 4 (3 punten) We weten dat $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Bereken alle $t \in [0, \pi]$ waarvoor geldt

$$1 + \cos t + \cos^2 t + \ldots + \cos^{11} t = \frac{3}{4}(1 + \cos^3 t + \cos^6 t + \cos^9 t).$$

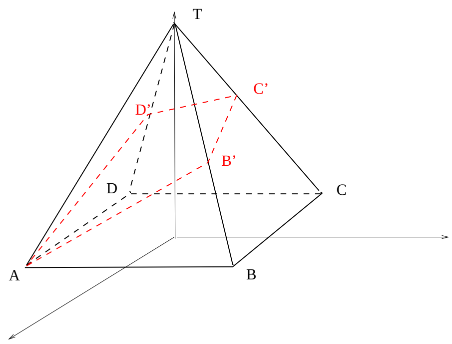
Vraag 5 (3 punten) De som van de eerste twee termen van een meetkundige rij is gelijk aan 36. Het produkt van de eerste term met de derde term is negen maal de tweede term. Bereken de som van de eerste acht termen van die meetkundige rij.

Vraag 6 (3 punten) Gegeven in een orthonormaal assenstelsel: de punten

$$A(3,-3,0),\ B(3,3,0),\ C(-3,3,0),\ D(-3,-3,0) \text{ en } T(0,0,6).$$

Gevraagd:

(1) bepaal de vergelijking van het vlak α door het punt A en loodrecht op de rechte TC.



(2) bereken de coordinaat van de punten $B' = \overline{TB} \bigcap \alpha$, $C' = \overline{TC} \bigcap \alpha$ en $D' = \overline{TD} \bigcap \alpha$.

(3) bereken het volume van het lichaam gevormd door de punten $TAB'C'D'$

(4) bereken het volume van het lichaam gevormd door de punten $AB'C'D'ABCD$

(5) bereken de verhouding van de volumes van deze twee lichamen

6 vragen

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = e^x|x-2|$ (domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling).

Vraag 2 (3 punten) Bereken

$$I = \int_{\ln \frac{\sqrt{3}}{3}}^{0} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Vraag 3 (3 punten) Los op in $\mathbb{C}$ met

$$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \text{ en } z_2 = 1 + i$$

(1) Schrijf $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ in de goniometrische vorm $R(\cos\alpha + i \cdot sin\alpha)$, $\alpha \in [0,\pi]$, $R \in \mathbb{R}^+$.

(2) Schrijf $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ in de algebraïsche vorm $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

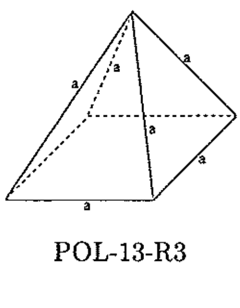
(3) Leidt hieruit de exacte waarden af voor $\cos\alpha$ en $\sin\alpha$.

Vraag 4 (3 punten) De wortels (nulpunten) van de veelterm $x^2 + px + q$ zijn $\tan\alpha$ en $\tan\beta$. Bereken de onderstaande uitdrukking V in functie van p en q

$$V = \sin^2(\alpha+\beta) + p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta).$$

Vraag 5 (3 punten) Men beschouwt een rij van reële getallen $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Bepaal n als je weet dat $u_1 + u_n = 66$, $u_2 \cdot u_{n-1} = 128$, $S_n = u_1 + \cdots + u_n = 126$ en dat de rij een meetkundige rij is met rede $r > 1$.

Vraag 6 (3 punten) De totale oppervlakte van een regelmatige vierzijdige piramide waarvan alle ribben even lang zijn, is gelijk aan $16(1+\sqrt{3})$.
Bereken de inhoud van deze piramide.



Bijkomende proef POL

6 vragen

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten)

Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $\quad f(x) = \sqrt{x}\,e^{-x}$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x)$, grafische voorstelling).

Vraag 2 (3 punten) Bereken

$$I = \int_{-\infty}^{0} e^{x} \cdot \sqrt{1-e^{2x}}\, dx.$$

Vraag 3 (3 punten)

In de driehoek ABC geldt dat $\quad a = \frac{7}{3}c\;$ en $\;b = \frac{8}{3}c$, waarbij $a = |BC|$, $b = |AC|$ en $c = |AB|$.

Gevraagd: toon aan dat $\quad \dfrac{\sin\frac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}{\sin\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}} = \dfrac{-1}{3}$ en dat $\quad \dfrac{\tan\frac{\hat{A}}{2}}{\tan\frac{\hat{B}}{2}} = \dfrac{1}{2}$, en bepaal vervolgens de waarde van de hoek $\hat{A}$.

Vraag 4 (3 punten) Los op in $\mathbb{R}$: $3^{2x-3} - 10\cdot 3^{x-2} + 3 = 0$.

Vraag 5 (3 punten) Bepaal de reële getallen a en b, alsook de wortels van de vergelijking

$$x^4 + x^3 - 12x^2 + ax + b = 0,$$

indien u weet dat deze vergelijking twee wortels heeft waarvan het product gelijk is aan 2, terwijl de twee andere wortels een som hebben gelijk aan 2.

Vraag 6 (3 punten) In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(1,2,0)$, $B(2,1,2)$ en $C(3,1,1)$, en de rechte d met vergelijkingen

$$\begin{cases} 4x+2y+z &= 3, \\ 6x+3y-z &= 2 \end{cases}.$$

Gevraagd:

(1) bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat het punt A en de rechte d bevat;

(2) bepaal de oppervlakte van de driehoek ABC.

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten)

Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = e^{\frac{1}{2(x^2-x)}}$
(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, asymptoten, grafische voorstelling).
Bereken ook linker- en rechterlimiet van de functie $f(x)$ in de discontinuïteitspunten.

Vraag 2 (3 punten) Bereken, beginnend met partiële integratie,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{(1+\sin x)^2}\, dx\,.$$

Vraag 3 (3 punten) Los op in $\mathbb{R}^2$ ($\log = \log_{10}$):

$$\begin{cases} \log x + \log(y^2) = 4; \\ \log^2 x - 3\log(xy) = -5. \end{cases}$$

Vraag 4 (3 punten) De volgende complexe vergelijking heeft één reëel nulpunt.
Bereken alle nulpunten.

$$z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i = 0.$$

Vraag 5 (3 punten) Voor welke waarden $a, b \in \mathbb{R}$ geldt :

$$\text{als } \sin^2(a+b) = (\sin a + \sin b)^2 \text{ dan } \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b$$

Vraag 6 (3 punten) In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A(0,1,0)$ en $B(2,3,1)$ en de rechte c met vergelijkingen

$$\begin{cases} x + y = 1; \\ 2y - z = 0. \end{cases}$$

Gevraagd:
(1) bepaal het punt $C \in c$ zo dat AB en AC elkaar loodrecht snijden;
(2) bepaal de cartesische vergelijking van de rechte d zo dat $A \in d$ en d loodrecht staat op het vlak bepaald door de punten A, B en C;
(3) bepaal het punt $F \in d$ zo dat de afstand (AF) gelijk is aan de afstand (AC).

---

6 vragen

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten) Bestudeer de functie $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \sqrt{x} \ln x$ (nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x)$, grafische voorstelling). Opmerking: $e \approx 2,7$.

Vraag 2 (3 punten) Bereken, beginnend met een partiële integratie,

$$I = \int_4^{12} \frac{\ln(4+x)}{\sqrt{x}}\, dx\,.$$

Vraag 3 (3 punten) Los op in $\mathbb{R}$:

$$x + 6 \leq \sqrt{x^3 + 7x^2 - 19x}\,.$$

Vraag 4 (3 punten) Los op in $\mathbb{C}$:

$$(1+i)\,z^3 + (1-i)\,z^2 + 2z - 4 = 0\,,$$

indien u weet dat $z_1 = 1$ een reële oplossing is van deze vergelijking.

Geef ook het argument en de modulus van de oplossingen.

Vraag 5 (3 punten) Bepaal de hoeken van de driehoek ABC, indien u weet dat $\hat{A} = 3\,\hat{B}$ en dat $|BC| = 2\,|AC|$.

Vraag 6 (3 punten) In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A\,(4,-4,0)$, $B\,(-4,4,0)$, $C\,(0,0,8)$ en $D\,(8,8,8)$, evenals het vlak α met vergelijking $x+2y-z=4$.

Gevraagd:

(a) bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak β dat door A gaat en dat loodrecht staat op de rechte BC;

(b) bepaal de coördinaat van het snijpunt P van de rechte BC met het vlak β;

(c) bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak γ dat door het punt D gaat en dat evenwijdig is met het vlak α.

Bijkomende proef POL

6 vragen

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (3 punten) Bereken, beginnend met een partiële integratie,

$$I = \int_1^3 \ln(x^2 - 2x + 5)\, dx\,.$$

Vraag 2 (5,5 punten)

(a) Toon aan dat voor elke reëel getal x geldt dat $e^x - x - 1 \geq 0$.

(b) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $\quad f(x) = x\,\dfrac{e^x}{e^x - 1}$
(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, asymptoten, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$, grafische voorstelling).

Vraag 3 (2,5 punten) In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A\,(1,2,1)$, $B\,(2,3,2)$, $C\,(-2,1,-1)$ en $D\,(4,1,0)$.

Gevraagd:

(a) bepaal de cartesiaanse vergelijking van het vlak α dat door de punten A, B en C gaat;

(b) bepaal de coördinaat van het voetpunt van de loodlijn neergelaten uit D op α.

Vraag 4 (3 punten) Los op in $\mathbb{C}$:

$$z^3 - 2iz^2 + (15 - 8i)z - 16 - 30i = 0\,,$$

indien u weet dat $z_1 = 2\,i$ één van de wortels van deze vergelijking is.

Geef ook het reëel deel en het imaginair deel van de wortels.

Vraag 5 (3 punten) Gegeven: de veeltermen $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$ en $g(x) = x^2 + ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}$.

Gevraagd: bepaal a en b zodanig dat de veelterm $g(x)$ de veelterm $f(x)$ deelt.

Vraag 6 (3 punten) Zij M het midden van de zijde $[BC]$ van de driehoek ABC.

Bewijs dat, indien $|AB| = |AM|$, dan $\tan\hat{B} = 3\tan\hat{C}$ en $\sin\hat{A} = 2\sin(\hat{B} - \hat{C})$.

---

6 vragen

Opmerking: laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (5 punten) (1) Toon aan dat $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{1}{x}}} = 0.$

(2) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $\quad f(x) = (x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x)$, grafische voorstelling).

Vraag 2 (3 punten) Bereken, beginnend met de verandering van veranderlijke $t = \sqrt{e^x - 1}$,

$$I = \int_{\ln 2}^{(2 \ln 2)} \frac{3}{(2 + e^x)\sqrt{e^x - 1}}\, dx\,.$$

Vraag 3 (3 punten)

In de driehoek ABC geldt dat $\dfrac{a}{4} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{c}{6}$, waarbij $a = |BC|$, $b = |AC|$ en $c = |AB|$

Gevraagd:

(1) toon aan dat $\hat{C} = 2\hat{A}$;

(2) bereken $\tan \dfrac{\hat{A}}{2}$.

Vraag 4 (3 punten) Los op in $\mathbb{C}$:

$$z^2 - \frac{11 + 3i}{2 + i}\, z = \frac{23 - 11i}{i - 3}\,.$$

Vraag 5 (3 punten) Bepaal de reële getallen a en b zodanig dat de veeltermen

$$x^3 + ax^2 - 14x + 12 \qquad \text{en} \qquad x^3 + bx^2 + 10x - 24$$

beiden deelbaar zijn door dezelfde veelterm van de tweede graad waarvan de coëfficiënt van x^2 gelijk is aan 1.

Vraag 6 (3 punten) Men beschouwt de raaklijn t in een punt P van de parabool met vergelijking $y = \dfrac{1}{4}x^2$. Deze raaklijn t snijdt de as van de parabool in het punt A en de topraaklijn van de parabool in het punt B. De top van de parabool noemen we C.

Gevraagd: bepaal de vergelijking en de aard van de meetkundige plaats van het middelpunt M van de cirkel die door A, B en C gaat, wanneer P de parabool doorloopt.

2007

Bijkomende proef POL

Reeks 3

6 vragen

Vraag 1 (1) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$ (domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling). Opmerking: $e \approx 2,7$.

(2) Bepaal de coördinaat van het punt P waarvoor geldt dat de raaklijn in P aan de grafiek van f door de oorsprong gaat.

Vraag 2 Bereken

$$I = \int_1^2 \frac{3}{x^3+1}\,dx\,.$$

Opmerking: $\ln 2 \approx 0,7$, $\ln 3 \approx 1,1$ en $\sqrt{3}\pi \approx 5,4$.

Vraag 3 Los op in $\mathbb{R}$: $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1\,.$

Vraag 4 Gegeven: de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ a & a^2 & a^3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad W = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix},$$

waarbij a een reële parameter is.

Gevraagd: bepaal alle waarden van a waarvoor geldt dat $AV = W$, en geef voor elke gevonden waarde van a de overeenkomstige waarde van $\det A$.

Vraag 5 In de driehoek ABC geldt dat $\sin(\hat{A} + \dfrac{\hat{B}}{2}) = k \sin\dfrac{\hat{B}}{2}$, met k een reële en positieve constante.

Gevraagd: toon aan dat $\tan\dfrac{\hat{A}}{2}\tan\dfrac{\hat{C}}{2} = \dfrac{k-1}{k+1}$.

Vraag 6 In de ruimte voorzien van een orthonormale ijk beschouwt men de punten

$O\,(0,0,0)$, $A\,(2,2,4)$, $B\,(4,4,2)$, $C\,(3,1,5)$.

Gevraagd:

(1) bepaal de cartesiaanse vergelijking van de bollen die door de punten O, A en B gaan en met straal $= 3\sqrt{3}$;

(2) bepaal de coördinaat van het middelpunt en de straal van de omgeschreven cirkel van de driehoek OAB;

(3) bepaal de coördinaat van het zwaartepunt van de driehoek ABC.

Bijkomende proef POL

6 vragen

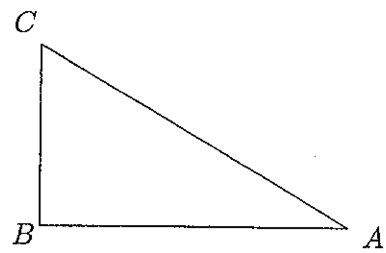
Vraag 1 Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(2x)}$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, $\lim_{x\to 0+} f(x)$, $\lim_{x\to 0+} f'(x)$, grafische voorstelling). Opmerking: $e \approx 2,7$.

Vraag 2 Bereken

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{16\cos t}{(\cos^2 t + 3)^2}\,dt.$$

Vraag 3 In de driehoek ABC is $\hat{B} = 90°$ en $\hat{A} < \hat{C}$ (zie figuur). Op de zijde $[AB]$ neemt men het punt P zodanig dat $|AP| = |BC|$ en op het verlengde van de zijde $[BC]$ neemt men het punt Q (C ligt tussen B en Q) zodanig dat $|CQ| = |AB|$. De rechte PQ snijdt de zijde $[AC]$ in R.



Gevraagd: toon aan dat $A\hat{R}P = 45°$.

Vraag 4 Gegeven: de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bereken de matrix A^{-1} en de matrix X zo dat $A \cdot X = B \cdot A^{-1}$.

Vraag 5 Men beschouwt de rij positieve getallen $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, waarbij, voor elke $n > 1$, er geldt $t_1 t_2 \cdots t_{n-1} = 4t_n$.

Vervolgens beschouwt men een nieuwe rij $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$, waarbij, voor elke $n \geq 1$, $T_n = \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} t_n}$.

Gevraagd: (a) toon aan dat de rij $T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots$ een meetkundige rij is;

(b) bepaal de uitdrukking van $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$ als functie van n, indien u weet dat $t_6 = 16$.

Vraag 6 Gegeven: een kubus met zijde 6.

Een bol gaat door de 4 hoekpunten van het grondvlak en raakt aan het bovenvlak.

Gevraagd: stel de vergelijking van deze bol op (ten opzichte van een zelfgekozen orthonormale ijk).

2005

Bijkomende proef POL

5 vragen

Reeks 1

Vraag 1

Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x) $\quad f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1+x}}$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling).

Vraag 2

Bereken:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5\sin x + 4\cos x + 5}\,dx \qquad \text{en} \qquad L = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x) - x^2}{e^x - e^{-x} - 2x}\,.$$

Opmerking: neem aan dat $\ln 3 = 1,1$ en dat $\ln 5 = 1,6$.

Vraag 3

Los de volgende vergelijkingen op in $\mathbb{R}$:

(a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4}$;

(b) $\log_2\left(2^{x+1} - 15\right) + x = 3$.

Vraag 4

Gegeven: de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{en} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gevraagd:

(1) toon aan dat er reële getallen a en b bestaan waarvoor geldt dat

$$(A + aI_3)B = b\,C^{-1}\,,$$

waarbij I_3 de eenheidsmatrix is van orde 3;

(2) bepaal A^{-1}.

Vraag 5 In de ruimte, voorzien van een orthonormale ijk, beschouwt men de punten $A\,(0,2,1)$ en $B\,(-1,1,3)$, evenals het vlak α met vergelijking $x + 5y + 9z - 13 = 0$ en het vlak β met vergelijking $3x + ky - 5z + 1 = 0$, waarbij k een reële parameter is.

Gevraagd: bepaal de waarde van de parameter k opdat de rechte AB de snijlijn van de vlakken α en β zou snijden.

---

5 vragen

Vraag 1 (a) Bereken $\lim_{x \to 0^+} x\,(\ln x - 1)^2$.

(b) Bestudeer de functie (van de reële veranderlijke x)

$$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling).

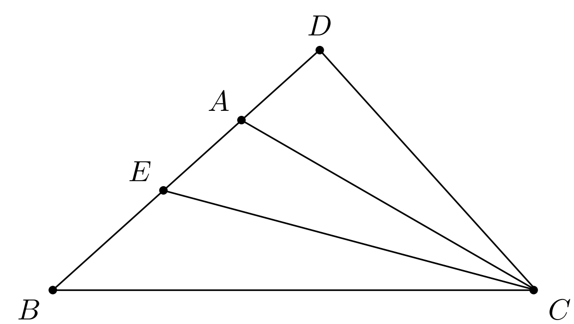
Opmerking: $e \approx 2,7$.

Vraag 2 Bereken de volgende integralen:

$$\text{(a)} \quad I_1 = \int_{3\sqrt{3}}^{4\sqrt{2}} \frac{12}{x\sqrt{36 - x^2}}\,dx\,, \qquad \text{(b)} \quad I_2 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, \ln(1 + \cos^2 x)\,dx\,.$$

Vraag 3 In de driehoek ABC is $\hat{A} = \alpha > 90°$.
De hoogtelijn neergelaten uit C snijdt het verlengde van de zijde $[AB]$ in D en de bissectrice van de hoek C snijdt $[AB]$ in E (zie figuur). Verder stelt men $\hat{B} = \beta$.
Gevraagd:
(a) druk de hoek $E\hat{C}D$ uit als functie van α en β;
(b) toon aan dat, indien $|AD| = |AE|$, er geldt

$$\tan^3 \frac{\alpha}{2} \, \tan \frac{\beta}{2} = 1\,.$$



Vraag 4 Los de volgende ongelijkheid op in $\mathbb{R}$:

$$\log_2(x + 1) + \log_4(x) < 1\,.$$

Vraag 5 Gegeven: de cirkel C met middelpunt $M\,(0, 4)$ en straal $R = 2$ en de rechte d met vergelijking $y + 3 = 0$.

Gevraagd: bepaal de cirkels die door de oorsprong gaan en die raken aan de cirkel C en de rechte d.

Analyse - Driehoeksmeting

4 vragen

Vraag 1

Bestudeer de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$$

(domein, nulpunten, stijgen en dalen, extrema, buigpunten, asymptoten, grafische voorstelling).

Vraag 2

Bereken

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x\,\sin x - \tan x}{\left(\sqrt{\sin^2 x + 1} - 1\right)\,\sin x}\,.$$

Vraag 3

(1) Toon aan dat $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

(2) Los op in $\mathbb{R}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\,\sin x\,.$$

Vraag 4

Bereken

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{96}{x^4\sqrt{4-x^2}}\,dx\,.$$

Bijkomende proef POL

2003 **Algebra - Meetkunde** Reeks 2

4 vragen

Vraag 1

Gegeven: volgende vergelijking met m een reële parameter

$$x^2 + mx + 2 = 0.$$

Gevraagd: bepaal de verzameling der waarden van m zo dat de vergelijking twee reële verschillende nulpunten heeft waarbij het grootste nulpunt groter is of gelijk aan twee maal het kleinste nulpunt.

Vraag 2

Gegeven: de matrix A met x, y en z reële parameters

$$A = \begin{bmatrix} z - y & -\dfrac{x+y}{2} \\ 0 & z - 2x \end{bmatrix}$$

Gevraagd: bepaal x, y en z zo dat

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vraag 3

Gegeven volgende vergelijking met a en b reële parameters

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^{13}}{(\sqrt{3} - i)^8} = a + ib, \quad i^2 = -1.$$

Gevraagd: bepaal a en b.

Vraag 4

Gegeven: het regelmatig viervlak $ABCD$ met zijde $|AB| = k$. Het orthonormaal assenstelsel wordt zodaning gekozen dat de oorsprong O samenvalt met het midden van $[AB]$ en $A, B \in x$-as en $C \in y$-as.

Gevraagd:

(1) de coördinaat van A, B, C en D;

(2) de coördinaat van het middelpunt van de omgeschreven bol van het viervlak $ABCD$;

(3) de straal van deze omgeschreven bol.
