Gemeenschappelijk proef wiskunde 2024 (N)

Antwoorden en oplossingen

## Vraag 1

Antwoord: $4$

Oplossing:

De rationale getallen uit de lijst zijn $12^{\frac{0}{1}}\ (=1), 27^{\frac{2}{3}}\ (=9), 25^{\frac{3}{2}}\ (=125), 16^{\frac{5}{4}}\ (=32)$.

## Vraag 2

Antwoord: $147$ Euro

Oplossing:

De afstand aan 60 km/u bedraagt één vierde van de afstand aan 120 km/u (de helft van de snelheid en gedurende slechts de helft van de tijd aan 120 km/u). Ze bedraagt dus één vijfde van de totale afstand. Er wordt dus 1.200/5 = 240 km gereden aan 60 km/u (5,6 l/100 km) en 960 km aan 120 km/u (7,1 l/100 km). De totale benzinekost bedraagt dan:

$$\left(240\ km \times 5{,}6\ \frac{liter}{100\ km} \times 1{,}8 \frac{Euro}{liter}\right) + \left(960\ km \times 7{,}1\ \frac{liter}{100\ km} \times 1{,}8 \frac{Euro}{liter}\right) = 146{,}88 \text{ Euro}$$

## Vraag 3

Antwoord: $15$ personen

Oplossing:

<table>
<tr><td></td><td>Bus</td><td>Vrachtw.</td><td>Tank</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>Nee</td><td>Nee</td><td>Ja</td><td></td><td rowspan="4">15 (*)</td><td rowspan="8">32 (*)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Nee</td><td>Ja</td><td>Ja</td><td>5-1=4 (1)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Ja</td><td>Nee</td><td>Ja</td><td>12-3=9 (3)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Ja</td><td>Ja</td><td>Ja</td><td>1 (*)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Ja</td><td>Nee</td><td>Nee</td><td>2-2=0 (2)</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Ja</td><td>Ja</td><td>Nee</td><td>2 (*)</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Nee</td><td>Nee</td><td>Nee</td><td rowspan="2">32-15-2=15 (4)</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>Nee</td><td>Ja</td><td>Nee</td><td></td></tr>
</table>

(*) Gegeven

(1) In totaal hebben 5 personen een rijbewijs voor tank en vrachtwagen (= rijen 2 en 4). Slechts één persoon hiervan heeft ook een rijbewijs voor bus (= rij 4). Van deze 5 zijn er dus 5–1 = 4 zonder rijbewijs voor bus (= rij 2).

(2) Twaalf personen hebben een rijbewijs voor bus (= rijen 3 tot en met 6); hiervan hebben er twee geen rijbewijs voor tank (= rijen 5 en 6). De waarde van rij 5 is dus 2 min de waarde van rij 6 (= 2–2 = 0).

(3) Twaalf personen hebben een rijbewijs voor bus (= rijen 3 tot en met 6). De waarde van rij 3 is dus 12 min de waardes van rijen 4, 5 en 6 (= 12–1–0–2 = 12–3 = 9).

(4) Er werken in totaal 32 personen (= alle rijen). Vijftien hiervan hebben een rijbewijs voor tank (= rijen 1 tot en met 4). Het aantal personen zonder rijbewijs voor tank (= rijen 5 tot en met 8) bedraagt dus 32–15=17. Hiervan zijn er twee met een rijbewijs bus (= rijen 5 en 6), en dus: 32–15–2 = 15 zonder rijbewijs bus.

**Vraag 4**

Antwoord: $-24$

Oplossing:

Oplossen van het gegeven stelsel geeft $x = 2, y = -3, z = 4$. Hun product is gelijk aan $-24$.

**Vraag 5**

Antwoord: 8

Oplossing:

Oplossen van $-x + 6 = 2x^2 + 8x + 15$ $(2x^2 + 9x + 9 = 0)$ geeft de volgende snijpunten tussen de rechte $-x + 6 = 0$ en de parabool $y = 2x^2 + 8x + 15$: $(-3{,}9)$ en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$. Het enige punt op de rechte en binnen de parabool waarvoor $y$ een geheel getal is, wordt dus gekenmerkt door $y = 8$ (enige gehele waarde tussen 9 en $\frac{15}{2}$ $(= 7{,}5)$).

Opmerking: Maak een schets voor een beter begrip.

**Vraag 6**

Antwoord: C

Oplossing:

Parabolen A, B en D hebben $a > 0$. Parabool E heeft $c > 0$. Deze vallen dus af.

Parabool C heeft $a < 0$ (bergparabool), $c < 0$ (y-waarde snijpunt met y-as) en $b < 0$ (want $\frac{-b}{2a} < 0$ (x-waarde top) en $a < 0$).

**Vraag 7**

Antwoord:

| |
|---|
| $f(a) > 0$ |
| $f'(a) > 0$ |
| $f''(a) < 0$ |

Oplossing:

De functiewaarde voor $x = a$ is positief ($f(a) = y > 0$).

De functie is stijgend voor $x = a$, dus positieve eerste afgeleide $f'(a)$.

De grafiek van de functie is ‘hol’ voor $x = a$, dus negatieve tweede afgeleide $f''(a)$.

**Vraag 8**

Antwoord: $-41$

Oplossing:

$g(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

$f\big(g(2)\big) = f(5) = -2 \times 5^2 + 2 \times 5 - 1 = -50 + 10 - 1 = -41$

**Vraag 9**

Antwoord: $\frac{3}{4}$

Oplossing:

$$g(x) = f'(x) = 6\left(cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^5 sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = 6\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

**Vraag 10**

Antwoord: $a = 13,\ b = -6$

Oplossing:

Horizontale raaklijn in $x = 1$: $f'(1) = 6 \times 1 + b = 0 \Longrightarrow b = -6$

Nulpunt in $x = 1$: $f(1) = 3 - a - b - 4 = 3 - a + 6 + 4 = 0 \Longrightarrow a = +13$

**Vraag 11**

Antwoord: $a = -\frac{3}{2},\ b = -\frac{1}{2}$

Oplossing:

Loodrecht op $-2x + 3y - 4 = 0$ $(y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}) \Longrightarrow a = \frac{-1}{2/3} = -\frac{3}{2}$

Gaat door $(1, -2)$: $a + b = -\frac{3}{2} + b = -2 \Longrightarrow b = -\frac{1}{2}$

**Vraag 12**

Antwoord: $b = -27$

Oplossing:

$f(x) = 3x^3 + bx^2 + 30x + 5$

$f'(x) = 9x^2 + 2bx + 30$

$f'(2) = 36 + 4b + 30$

$f'(4) = 144 + 8b + 30$

$f'(2) = f'(4) \Longrightarrow\ 36 + 4b + 30 = 144 + 8b + 30 \Longrightarrow b = -27$

**Vraag 13**

Antwoord: 1

Oplossing:

$f(x)$ is deelbaar door $(x+1)$

Na uitvoeren van de deling: $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x-1) = (x-2)(x-3)(x-1)$

De andere nulpunten zijn dus $x = 2$ en $x = 3$.

De absolute waarde van hun verschil is gelijk aan 1 ( $|3-2| = |2-3| = 1$).

**Vraag 14**

Antwoord: $k = 15$, extremum = maximum

Oplossing:

Extremum: $f'(x) = -6x^2 + 2kx - 36 = 0$

Extremum voor $x = 3$: $f'(3) = -54 + 6k - 36 = 0 \Longrightarrow k = 15$

$f'(x)$ wisselt bij $x = 3$ van een positief teken ($f(x)$ stijgend) naar een negatief teken ($f(x)$ dalend), dus het extremum bij $x = 3$ is een maximum.

**Vraag 15**

Antwoord: $b = 2$

Oplossing:

$$\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\, cos(x) dx = 4\, sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$\frac{b^4}{4} = 4 \implies b = \pm 2$$

$b > 0 \implies b = 2\ (-2 < 0)$

**Vraag 16**

Antwoord: $a = -1$

Oplossing:

De rest bij deling van $f(x)$ door $(3x-2)$ is 3 maal groter dan de rest bij deling van $\frac{f(x)}{3}$ door $\left(x - \frac{2}{3}\right)$. De laatste is dus gelijk aan $\frac{1}{3} . \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$, en is volgens de reststelling ook gelijk aan $\frac{f(\frac{2}{3})}{3} = \frac{1}{3}(3\frac{8}{27} + 2\frac{4}{9} + \frac{2}{3} + a)$.

Oplossen van $\frac{1}{3}\left(3\frac{8}{27} + 2\frac{4}{9} + \frac{2}{3} + a\right) = \frac{13}{27}$ geeft $a = -1$.

**Vraag 17**

Antwoord: Oppervlakte = 4

Oplossing:

We gebruiken twee keren de formule voor de oppervlakte tussen de grafieken van twee functies $f(x)$ en $g(x)$: $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ met telkens $g(x) = 4$. De integratiegrenzen $a$ en $b$ worden gegeven door de abscissen (x-waardes) van de snijpunten van de gegeven rechten.

$$\int_2^3 (4x - 4 - 4) dx + \int_3^4 (-4x + 20 - 4)\, dx = [2x^2 - 8x]_2^3 + [-2x^2 + 16x]_3^4 = 2 + 2 = 4$$

Opmerking: Maak een schets voor een beter begrip. De oppervlakte is tevens gelijk aan de oppervlakte van de (gelijkzijdige) driehoek met hoekpunten (2,4), (3,8) en (4,4).

**Vraag 18**

Antwoord: $70650\ cm^2$

Oplossing:

$L + B = 800\ cm.$

$L \times B = L \times (800 - L) = 15000\ cm^2 \Longrightarrow L = 500\ cm\ \Longrightarrow 800 - L = B = 300\ cm.$

De grootste cirkel die volledig binnen deze rechthoek past heeft een diameter die gelijk is aan de breedte van de rechthoek ($300\ cm$). De oppervlakte bedraagt $3{,}14 \frac{(300\ cm)^2}{4} = 70650\ cm^2$.

Opmerking: Maak eventueel een schets voor een beter begrip.

**Vraag 19**

Antwoord: $14\ \%$

Oplossing:

Een kansboom leert dat er 8 gunstige uitkomsten zijn, waarvan vier met een kans van $\frac{5}{12}\frac{4}{11}\frac{3}{10}\frac{3}{9} = \frac{5}{330}$ en vier met een kans van $\frac{5}{12}\frac{4}{11}\frac{4}{10}\frac{3}{9} = \frac{2}{99}$.

De totale kans op een gunstige uitkomst is dus gelijk aan $4\frac{5}{330} + 4\frac{2}{99} = \frac{14}{99} \cong 0{,}14$

**Vraag 20**

Antwoord: $12\ \%$

Oplossing:

Met 2 dobbelstenen zijn er 36 worpen mogelijk: 1-1 1-2 1-3 1-4 1-5 1-6 2-1 2-2 2-3 2-4 … 6-6.

Elke waarde heeft een bepaalde kans om voor te komen. Zo heeft de waarde 2 een kans van 1 op 36, omdat ze elk door slechts 1 van de 36 mogelijke worpen tot stand kan komen (namelijk 1-1). De waarde 3 kan op twee manieren tot stand komen (1-2 en 2-1) en heeft dus een kans van 2 op 36. De waarde 4 kan op 3 manieren tot stand komen (1-3 2-2 en 3-1) en heeft dus een kans van 3 op 36. Op die manier kan voor elke waarde de kans worden berekend:

| Waarde | Kans |
|---|---|
| 1 | 0/36 |
| 2 | 1/36 |
| 3 | 2/36 |
| 4 | 3/36 |
| 5 | 4/36 |
| 6 | 5/36 |

| Waarde | Kans |
|---|---|
| 7 | 6/36 |
| 8 | 5/36 |
| 9 | 4/36 |
| 10 | 3/36 |
| 11 | 2/36 |
| 12 | 1/36 |

De waarde van de eerste worp is minstens het dubbele van de waarde van de tweede worp voor de volgende 25 combinaties van waardes: 4-2 5-2 6-2 … 12-2 6-3 7-3 … 12-3 8-4 9-4 … 12-4 10-5 11-5 12-5 en 12-6. De kans op elke combinatie is het product van de kans op elke waarde uit de combinatie. Zo is de kans op 4-2 gelijk aan 3/1296, de kans op 5-2 gelijk aan 4/1296, … de kans op 11-5 gelijk aan 8/1296, de kans op 12-5 gelijk aan 4/1296 en de kans op 12-6 gelijk aan 5/1296.

De som van al deze kansen is gelijk aan $\frac{3+4+\cdots+8+4+5}{1296} = \frac{159}{1296} \cong 0{,}12$