

1. Werk verzorgd, leg de redenering duidelijk uit en geef de berekeningen in detail weer.
2. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
3. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
4. Laat in uw antwoorden getallen zoals π , e , $\ln 2$ en $\sqrt{3}$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	Totaal
Punten	5	6	4	5	20

Vraag 1 _____ **5 punten**

Los op in $\mathbb{R}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin x.$$

Vraag 2 _____ **6 punten**

We bedoelen met $\lfloor x \rfloor$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x . Bijvoorbeeld: $\lfloor \pi \rfloor = 3 = \lfloor 3 \rfloor$ en $\lfloor -\frac{8}{9} \rfloor = -1$.

(a) (2 punten) Teken de grafiek van de functie $f(x) = x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$, voor $x \in [1, 4]$.

(b) (2 punten) Bereken $\int_1^4 \left(x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right) dx$.

(c) (2 punten) Los de vergelijking $3\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ op in $\mathbb{R}$.

Vraag 3 _____ **4 punten**

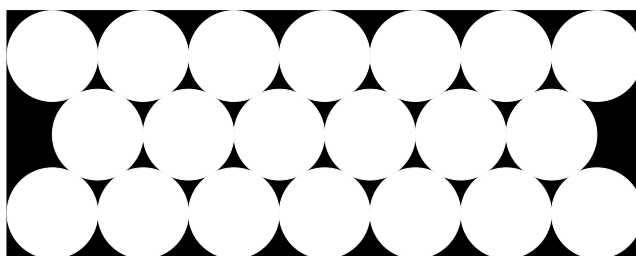
Vind $x > 1$ zodat

$$\frac{\pi}{12} - \int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}} dy = 0.$$

U mag de substitutie $u^2 = y^2 - 1$ gebruiken om de integraal te berekenen.

Vraag 4 _____ **5 punten**

Het onderstaande schema toont 20 cirkels gerangschikt in een rechthoek. De cirkels raken elkaar onderling en raken de zijden van de rechthoek, zoals te zien is op het schema. De cirkels hebben allemaal dezelfde straal r .



(a) (3 punten) Toon aan dat de breedte (kleine zijde) van de rechthoek gelijk is aan $2(\sqrt{3} + 1)r$.

(b) (1 punt) Bereken in functie van r de oppervlakte van het zwart gekleurde gebied op het schema.

- (c) (1 punt) Bepaal de natuurlijke getallen a en b wetende dat de verhouding tussen de lengtes van de lange zijde van de rechthoek en de korte zijde van de rechthoek kan worden geschreven als $\frac{1}{2}(\sqrt{a} - b)$.

1. Werk verzorgd, leg de redenering duidelijk uit en geef de berekeningen in detail weer.
2. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
3. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
4. Laat in uw antwoorden getallen zoals π , e , $\ln 2$ en $\sqrt{3}$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	Totaal
Punten	4	4	6	6	20

Vraag 1 _____ **4 punten**

Voor deze vraag is z een complex getal.

- (a) (1 punt) Druk $\frac{z^5-1}{z-1}$ uit in de vorm van een veelterm (in de veronderstelling dat $z \neq 1$), waarbij u alle stappen van uw berekening goed aangeeft.
- (b) (3 punten) We noemen m het product van de oplossingen van de vergelijking $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ die een strikt positief imaginair deel hebben. (De oplossingen die een negatief of nul imaginair deel hebben, spelen dus geen rol in het product m .) Geef m weer in de vorm $a + bi$. Tip: gebruik deelvraag (a) om te helpen.

Vraag 2 _____ **4 punten**

We geven het volgende stelsel van onbekenden x en y met a en b twee niet-nul parameters:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b. \end{cases}$$

- (a) (2 punten) Zonder het stelsel op te lossen bereken xy als functie van de twee parameters a en b .
- (b) (2 punten) Los het stelsel naar x en y op.
 Als u het antwoord op de vorige deelvraag niet hebt gevonden, mag u veronderstellen dat $xy = C$, waarbij C een gegeven constante is, en een uitdrukking voor x en y in functie van C bepalen.

Vraag 3 _____ **6 punten**

We geven twee rechten a en b in de ruimte met een orthonormaal assenstelsel:

$$a \equiv 2x - 4 = y - 2 = z \quad \text{en} \quad b \equiv \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 3z \end{cases}.$$

- (a) (2 punten) Geef de cartesische vergelijking van het vlak dat evenwijdig is aan a en dat b bevat.
- (b) (2 punten) Geef de cartesische vergelijkingen van de rechte die evenwijdig is aan de x -as en de rechten a en b snijdt.
- (c) (2 punten) Bepaal het punt $P \in a$ en het punt $Q \in b$ zodat de rechte PQ evenwijdig is aan het vlak Oxy en de afstand tussen P en Q minimaal is.

- (a) (1 punt) Bepaal het aantal punten (n, m) in $\mathbb{R}^2$ waarvan de coördinaten strikt positieve gehele getallen zijn en die aan de volgende twee voorwaarden voldoen:

$$m \leq 2n \leq 4 \quad \text{en} \quad n \leq 2m \leq 4.$$

Geef ook de twee voorwaarden en de gevonden punten weer in een orthonormaal assenstelsel.

- (b) (2 punten) Dezelfde vraag met de volgende twee voorwaarden:

$$m \leq 2n \leq 12 \quad \text{en} \quad n \leq 2m \leq 12.$$

- (c) (3 punten) Dezelfde vraag met de volgende twee voorwaarden:

$$m \leq 2n \leq 60 \quad \text{en} \quad n \leq 2m \leq 60.$$

U mag eventueel gebruikmaken van een grafische voorstelling, maar dit is niet langer vereist.