Epreuve commune de mathématiques 2024 (F)

Réponses et solutions

Question 1

Réponse : 3

Solution :

$(-36)^{\frac{-1}{2}}, 16^{\frac{4}{3}}$ et $30^{\frac{3}{4}}$ ne sont pas des nombres rationnels.

Question 2

Réponse : 248 Euro

Solution :

La distance parcourue à 50 km/h (5,4 l/100 km) est la moitié de la distance parcourue à 100 km/h (la moitié de la vitesse pendant le même temps).
Elle vaut donc un tier de la distance totale : (2250 km)/3 = 750 km. La distance parcourue à 100 km/h (6,5 l/100 km) vaut 2250 km – 750 km = 1500 km. En essence, le voyage coûtera donc :

$$\left(750\ km \times 5{,}4\ \frac{l}{100\ km} \times 1{,}8 \frac{Euro}{litre}\right) + \left(1.500\ km \times 6{,}5\ \frac{l}{100\ km} \times 1{,}8 \frac{Euro}{litre}\right) = 248{,}40\ Euro$$

Question 3

Réponse : 21 boîtes

Solution :

<table>
<tr><td></td><td>Ballon</td><td>Cascette</td><td>Corde</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>Non</td><td>Non</td><td>Oui</td><td></td><td rowspan="4">10 (*)</td><td rowspan="8">40 (*)</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Non</td><td>Oui</td><td>Oui</td><td>3 (1)</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Oui</td><td>Non</td><td>Oui</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Oui</td><td>Oui</td><td>Oui</td><td>2 (*)</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Oui</td><td>Non</td><td>Non</td><td>1 (2)</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>Oui</td><td>Oui</td><td>Non</td><td>6 (*)</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Non</td><td>Non</td><td>Non</td><td>2 (*)</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>Non</td><td>Oui</td><td>Non</td><td>21 (3)</td><td></td></tr>
</table>

(*) Donné

(1) Cinq boîtes contiennent une corde et une cascette (= lignes 2 et 4). Deux d'entre elles contiennent également un ballon (= ligne 4), donc 3 d'entre elles ne contiennent pas de ballon (= ligne 2).

(2) Douze boîtes contiennent un ballon (= lignes 3, 4, 5 et 6). Parmi elles, sept ne contiennent pas de corde (= lignes 5 et 6).
La valeur de la ligne 5 vaut donc 7 moins la valeur de la ligne 6 = 7 – 6 = 1.

(3) 40 – 10 – 1 – 6 – 2 =21

Question 4

Réponse : -24

Solution :

La résolution du système d'équations donne : $x = 2, y = -3, z = 4$. Leur produit vaut -24.

Question 5

Réponse : 4

Solution :

Résoudre $-x + 3 = 2x^2 + 4x + 5$ $(2x^2 + 5x + 2 = 0)$ donne les points d'intersection suivants entre la droite $-x + 3 = 0$ et la parabole $y = 2x^2 + 4x + 5$: $(-2{,}5)$ et $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$. Le seul point sur la droite et à l'intérieur de la parabole est donc caractérisé par $y = 4$ (seul nombre entier entre 5 et $\frac{7}{2}$($= 3{,}5$)).

Remarque : Faîtes un dessin pour une meilleure compréhension.

Question 6

Réponse : B

Solution :

Les paraboles C et E sont caractérisées par $a > 0$. Les paraboles A et D sont caractérisées par $c > 0$. Elles ne sont donc pas à prendre en considération.

La parabole B est caractérisée par $a < 0$ (sommet = minimum), $c < 0$ (point d'intersection avec l'axe des y caractérisé par y > 0) et $b < 0$ (car $\frac{-b}{2a} < 0$ (sommet avec abscisse négative) et $a < 0$).

Question 7

Réponse :

$f(a) > 0$
$f'(a) < 0$
$f''(a) > 0$

Solution :

La valeur de la fonction pour $x = a$ est positive ($f(a) = y > 0$).

La fonction est décroissante pour $x = a$, donc dérivée $f'(a)$ négative.

La fonction est convexe pour $x = a$, donc dérivée seconde $f''(a)$ positive.

Question 8

Réponse : 1

Solution :

$g(3) = -2 \times 3 - 1 = -7$

$f\big(g(2)\big) = f(-7) = -7^2 - 6.(-7) + 8 = -49 + 42 + 8 = 1$

Question 9

Réponse : $\frac{1}{3}$

Solution :

$$g(x) = f'(x) = \frac{4}{3}\left(cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3 sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3}\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Question 10

Réponse : $a = 1,\ b = 4$

Solution :

Tangente horizontale en $x = -2 : f'(-2) = -4a + b = 0$

Zéro en $x = -1 : f(-1) = a - b + 3 = 0$

La résolution du système d’équations donne $a = 1$ et $b = 4$.

Question 11

Réponse : $a = -3,\ b = 3$

Solution :

Perpendiculaire à $-x + 3y - 4 = 0$ $(y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}) \Longrightarrow a = \frac{-1}{1/3} = -3$

Passant par $(2, -3)$: $2a + b = -6 + b = -3 \Longrightarrow b = 3$

Question 12

Réponse : $b = -\frac{45}{2}$

Solution :

$f(x) = 3x^3 + bx^2 + 30x - 5$

$f'(x) = 9x^2 + 2bx + 30$

$f'(2) = 36 + 4b + 30$

$f'(3) = 81 + 6b + 30$

$f'(2) = f'(3) \Longrightarrow\ 36 + 4b + 30 = 81 + 8b + 30 \Longrightarrow b = -\frac{45}{2}$

Question 13

Réponse : 1

Solution :

$f(x)$ est divisible par $(x - 1)$

La division donne : $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x + 1) = (x - 2)(x - 3)(x - 1)$

Les autres zéros sont donc $x = 2$ et $x = 3$.

La valeur absolue de la différence vaut 1 ($|3 - 2| = |2 - 3| = 1$).

Question 14

Réponse : $k = -12$, extremum = minimum

Solution :

Extremum: $f'(x) = 6x^2 + 2kx + 18 = 0$

Extremum pour $x = 3$: $f'(3) = 54 + 6k + 18 = 0 \Longrightarrow k = -12$

$f'(x)$ change de signe pour $x = 3$, d'un signe négatif ($f(x)$ décroissante) vers un signe positif ($f(x)$ croissante), donc l'extremum à $x = 3$ est un minimum.

Question 15

Réponse : $b = 3$

Solution :

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\, cos(x) dx = 9\, sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 9$$

$$\frac{b^3}{3} = 9 \implies b = \pm 3$$

$$b > 0 \implies b = 3\ (-3 < 0)$$

Question 16

Réponse : $a = \frac{5}{2}$

Solution :

Le reste de la division de $f(x)$ par $(2x+1)$ est deux fois plus grand que le reste de la division de $\frac{f(x)}{2}$ par $\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Ce dernier vaut donc $\frac{1}{2}.\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$, et est également donné par le théorème des restes : $\frac{f(-\frac{1}{2})}{2} = \frac{1}{2}\left(4(-\frac{1}{8}) + 6\frac{1}{4} + 4(-\frac{1}{2}) + a\right)$.

Résoudre $\frac{1}{2}\left(4(-\frac{1}{8}) + 6\frac{1}{4} + 4(-\frac{1}{2}) + a\right) = \frac{3}{4}$ donne $a = \frac{5}{2}$.

Question 17

Réponse : Aire = 4

Solution :

Nous utilisons deux fois la formule de l'aire entre les graphes de deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$: $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$, avec $g(x) = 2$. Les bornes d'intégration a et b sont les abscisses des points d'intersection des droites données.
L'aire est alors donnée par :

$$\int_1^4 \left(-\frac{4}{3}x + \frac{22}{3} - 2\right) dx - \int_1^2 (-4x + 10 - 2)\, dx = \left[-\frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}x\right]_1^4 - [-2x^2 + 8x]_1^2 = 6 - 2 = 4$$

Remarque : Faites un dessin pour une meilleure compréhension. L'aire peut aussi être calculée par la différence des aires de deux triangles rectangles, un avec sommets (1,2), (1,6) et (4,2) en un autre avec sommets (1,2), (1,6) et (2,2).

Question 18

Réponse : $70650\ cm^2$

Solution :

$L + B = 900\ cm.$

$L \times B = L \times (900 - L) = 18000\ cm^2 \Longrightarrow L = 600\ cm\ \Longrightarrow 900 - L = B = 300\ cm.$

Le plus grand cercle situé complètement à l'intérieur de ce rectangle a un diamètre qui est égal à la largeur du rectangle ($300\ cm$). L'aire vaut $3{,}14\frac{(300\ cm)^2}{4} = 70650\ cm^2$.

Remarque : Faites éventuellement un dessin pour une meilleure compréhension.

Question 19

Réponse : 12 %

Solution :

Un arbre de probabilité nous apprend qu'il y a 6 issues favorables, dont 3 avec une probabilité de $\frac{6}{12}\frac{3}{11}\frac{2}{10} = \frac{3}{110}$ et 3 avec une probabilité de$\frac{3}{12}\frac{3}{11}\frac{2}{10} = \frac{3}{220}$.

La probabilité d'avoir exactement 2 pièces de Belgique est donnée par : $3\frac{3}{110} + 3\frac{3}{220} = \frac{27}{220} \cong 0{,}12$

Question 20

Réponse : 88 %

Solution :

Avec 2 dés, 36 lancers sont possibles : 1-1 1-2 1-3 1-4 1-5 1-6 2-1 2-2 2-3 2-4 … 6-6.

Chaque valeur a une certaine probabilité d'apparition. Ainsi, la valeur 2 à une probabilité de 1 sur 36, car elle ne peut se produire que par un lancer parmi les 36 (plus particulièrement 1-1). La valeur 3 peut se produire de deux façons (1-2 et 2-1) et a donc une probabilité de 2 sur 36. La valeur 4 peut se produire de trois façons (1-3 2-2 et 3-1) et a donc une probabilité de 3 sur 36. De cette manière la probabilité de chaque valeur peut être calculée :

Valeur	Probabilité
1	0/36
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36

Valeur	Probabilité
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

La valeur du premier lancer est supérieure ou égale au double de la valeur du deuxième lancer pour les 25 combinaisons suivantes de valeurs : 4-2 5-2 6-2 … 12-2 6-3 7-3 … 12-3 8-4 9-4 … 12-4 10-5 11-5 12-5 et 12-6. La probabilité de chaque combinaison est le produit des probabilité de chaque valeur dans la combinaison (la probabilité de 4-2 vaut 3/1296, la probabilité de 5-2 vaut 4/1296, … la probabilité de 11-5 vaut 8/1296, la probabilité de 12-5 vaut 4/1296 et la probabilité de 12-6 vaut 5/1296.

La somme de toutes ces probabilités est égale à $\frac{3+4+\cdots+8+4+5}{1296} = \frac{159}{1296}$.

La probabilité que la valeur du premier lancer soit inférieure au double de la valeur du second lancer est égale à 1 moins cette somme $1 - \frac{159}{1296} \cong 0{,}88$.

Concours d'admission de l'Ecole Royale Militaire

Epreuve Math commune

Deuxième degré de l'enseignement secondaire

Figures isométriques et figures semblables

- Angle inscrit, angle au centre dans un cercle
- Figures isométriques
- Cas d'isométrie des triangles
- Théorème de Thalès (sans démonstration)
- Figures semblables
- Cas de similitude des triangles

Triangle rectangle

- Théorème de Pythagore
- Médiane relative à l'hypoténuse
- Inscriptible d'un triangle rectangle dans un demi-cercle
- Propriétés métriques dans un triangle rectangle
- Nombres irrationnels
- Tribométrie :
    - Définition du sinus, cosinus et tangente d'un angle dans le triangle rectangle
    - Nombres trigonométriques de 30°, 45° et 60°
    - Angle correspondant à une pente, à une inclinaison exprimée en %

Approche graphique d'une fonction

- Relation, fonction
- Graphique d'une fonction
- Variable dépendante, variable indépendante
- Parties de $\mathbb{R}$
- Eléments caractéristiques d'une fonction exclusivement à partir de son graphique :
    - Domaine et ensemble-image
    - Zéro(s)
    - Signe

Fonction du premier degré

- Fonction du premier degré : $x \mapsto mx + p$ $m \neq 0$
- Fonction constante : $x \mapsto p$
- Représentation graphique de la fonction du premier degré et de la fonction constante
- Rôle des paramètres m et p
- Caractéristiques de la fonction du premier degré et de la fonction constante :
    - Zéro
    - Signe
    - Croissance-décroissance
- Inéquation du premier degré
- Intersection de deux fonctions du premier degré et/ou constantes

Outils algébriques

- Principes d'équivalence des inégalités
- Equations impossible et indéterminée
- Règle du produit nul
- Equation produit
- Système d'équations linéaires
- Puissances à exposant entier
- Racines (carrée – cubique)
- Polynômes à une variable: degré, coefficients, opérations
- Loi du reste
- Factorisation
- Fractions rationnelles

Statistique descriptive

- Population et échantillon
- Caractères qualitatifs et quantitatif
- Caractères discrets et continu
- Classes de données, centre de classe
- Effectifs et fréquences cumules
- Indicateurs de position : mode, moyenne arithmétique, médiane, quartiles
- Indicateurs de dispersion : étendue, variance, écart-type, intervalle interquartile
- Graphiques statistiques : boite à moustaches, histogramme et diagrammes cumulatifs
- Fonctions statistiques et graphiques d'un logiciel (ordinateur, tablette ou calculatrice)

Géométrie dans l'espace

- Représentation plane d'un objet de l'espace
- Comparaison entre perspectives cavalière et centrale
- Caractérisation d'une droite et d'un plan
- Positions relatives de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan

Trigonométrie

- Définition du sinus, cosinus et tangente d'un angle dans le cercle trigonométrique
- Relations principales :
    - $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
    - $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- Formule de l'aire d'un triangle quelconque
- Relation des sinus
- Relation des cosinus (théorème d'Al Kashi)

Fonctions de référence

- Représentations graphiques des fonctions de référence :
  - $x \mapsto x$
  - $x \mapsto \frac{1}{x}$
  - $x \mapsto x^2$
  - $x \mapsto x^3$
  - $x \mapsto |x|$
  - $x \mapsto \sqrt{x}$
  - $x \mapsto \sqrt[3]{x}$
- Croissance, décroissance, extremums sur un intervalle
- Parité
- Caractéristiques graphiques des fonctions de référence :
  - Asymptote
  - Point d'inflexion
  - Relation de réciprocité
- Transformées de fonctions par
  - Symétrie orthogonale
  - Translation
  - Affinité

Fonction du deuxième degré

- Fonction du deuxième degré
- Caractéristiques de la fonction du deuxième degré :
  - Zéro
  - Signe
  - Croissance, décroissance
  - Extremum
- Caractéristiques de la parabole d'axe vertical :
  - Sommet
  - Axe de symétrie
  - Concavité
- Equations et inéquations du deuxième degré
- Somme et produit des solutions de l'équation du deuxième degré
- Forme factorisée du trinôme du deuxième degré

Géométrie analytique plane

- Vecteurs
- Addition de deux vecteurs
- Multiplication d'un vecteur par un réel
- Vecteurs colinéaires
- Repère orthonormé
- Composantes d'un vecteur
- Vecteur directeur d'une droite
- Equation vectorielle, paramétrique et cartésienne d'une droite
- Droite d'équation ax + by + c = 0
- Coefficient angulaire d'une droite
- Condition de parallélisme et de perpendicularité de deux droites
- Distance entre un point et une droite
- Milieu d'un segment
- Définition de la parabole en tant que lieu géométrique
- Equation cartésienne d'une parabole d'axe vertical
- Equation cartésienne d'un cercle

Troisième degré de l'enseignement secondaire

Statistique à 2 variables

- Représentation d'une série statistique à deux variables
- Point moyen
- Ajustement linéaire
- Coefficient de corrélation linéaire
- Fonctions statistiques et graphiques de l'outil informatique

Suites

- Suites arithmétiques, suites géométriques :
- Terme général
  - Somme des n premiers termes
  - Type de croissance
  - Convergence

Asymptotes et limites

- Operations sur les fonctions (y compris la composition)
- Limite d'une fonction
- Règles de calcul des limites
- Asymptotes

  On se limitera, pour les calculs, aux fonctions rationnelles.

Dérivée

- Taux d'accroissement
- Nombre dérive
- Tangente en un point du graphique d'une fonction
- Fonction dérivée
- Dérivée des fonctions de référence
- Formules de dérivation
- Liens entre la dérivée première et la croissance d'une fonction
- Extremum local
- Liens entre la dérivée seconde et la concavité du graphique d'une fonction
- Point d'inflexion

  On se limitera, pour les calculs, aux fonctions rationnelles et racine carrée.

Fonctions trigonométriques

- Nombre π
- Angles, arcs, secteurs circulaires
- Radian
- Angles orientés
- Fonctions trigonométriques de référence :
  - $x \mapsto \sin(x)$
  - $x \mapsto \cos(x)$
  - $x \mapsto \tan(x)$
- Fonction trigonométrique : $x \mapsto a \sin(bx + c)$
  - Amplitude
  - Période
  - Déphasage

Probabilité

- Outils d’appropriation et de calcul de probabilités :
    - Arbre
    - Diagramme de Venn
    - Simulation
    - Tableau
    - Analyse combinatoire :
        - Arrangements avec et sans répétitions
        - Combinaisons sans répétitions
        - Permutations avec et sans répétitions
- Expérience aléatoire, catégorie d’épreuve, événements
- Probabilité d’un événement
- Propriétés des probabilités
- Probabilité conditionnelle
- Evénements indépendants

Lois de probabilité

- Loi binomiale :
    - Epreuve et schéma de Bernoulli
    - Espérance mathématique et écart-type
    - Distribution de probabilité
- Loi normale :
    - Espérance mathématique et écart-type
    - Graphique de la distribution de probabilité
- Table de la loi normale et outil informatique

Intégrale

- Encadrement d’une aire, d’un volume
- Intégrale définie
- Théorème fondamental
- Primitives

Fonctions exponentielles et logarithmes

- Fonctions exponentielles
- Fonctions logarithmes
- Relation de réciprocité des fonctions exponentielles et logarithmes
- Fonction exponentielle et fonction logarithme de base e

Epreuve commune de mathématiques Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie 20 questions	2023 Série A

- Les manuels et les calculatrices ne sont pas autorisés.
- Les réponses aux questions seront notées comme suit :
  - Vous commencez avec 0 sur 20.
  - Une réponse correcte vous donnera 1 point.
  - Une abstention ou une mauvaise réponse ne change pas votre résultat.
- Réponses sur la feuille de réponses.
- **Chaque réponse doit être écrite sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible**.

1. Alice et Bob conduisent en ligne droite à vitesse constante d'un point A à un point B.

   Alice part à 12h36 et roule à 60 km/h.

   Bob conduit à 80 km/h.

   Alice et Bob arrivent simultanément au point B.

   Le point B est à 48 km du point A.

   A quelle heure Bob est-il parti ?

   Réponse: ... h ....

2. Quelqu'un a ajouté une plante aquatique à son étang. La surface des feuilles de la plante double chaque jour. Après 20 jours, l'étang est complètement couvert.

   Combien de temps faudrait-il pour recouvrir complètement l'étang si l'on avait pris pas un seul mais quatre plantes (identiques) ?

   Réponse: ... jours

3. On donne: $3\log(9) + 9\log(3) = a\log\left(3^b\right)$

   Le logarithme ci-dessus utilise la base 10.

   On demande: $a \cdot b$

   Réponse: $a \cdot b = \ldots$

4. On demande: la plus petite valeur positive de x (en degrés) pour laquelle $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Réponse: $x = \ldots^\circ$

5. On donne:

- $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+5}\right)^2$
- g est la dérivée de f

On demande: $g(-3)$

Réponse: $g(-3) = \ldots$

6. On donne:

   - $f(x) = \frac{4x+5}{x^2}$
   - $y = ax + b$ est l'équation de la normale [1] au graphique de f au point $(-1, f(-1))$

   On demande: Déterminez a et b.

   Réponse: $a = \ldots$, $b = \ldots$

7. Lequel des cinq nombres suivants n'est pas égal aux autres ?

   A) $(2^4)^8$
   B) $(4^2)^8$
   C) $2^{16} \cdot 16^2$
   D) $2^{16} \cdot 2^{16}$
   E) $4^8 \cdot 4^8$

   Réponse: $\ldots$

8. Combien vaut le reste de la division polynomiale suivante: $\frac{3x^3+2x^2+x+1}{3x-2}$?

   Réponse: $\ldots$

9. Si $\int_0^3 x^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin(x) dx$, quelle est alors la valeur de a ?

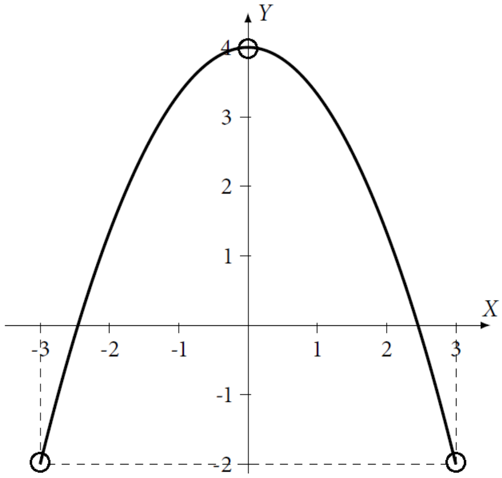
   Réponse: $a = \ldots$

10. Trois ouvriers ont une tâche commune. Le premier prendrait 2 heures à lui seul, le deuxième travaille deux fois moins vite que le premier et le troisième deux fois plus vite que le premier. Combien de temps (exprimé en heures) ont-ils besoin s'ils travaillent ensemble ?

    Réponse: $\ldots$ heures.

11. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ et si le graphique de f est donné par la figure sous-jacente, combien vaut alors $\int_{-2}^{3} f(x) dx$?

[1] La normale est la droite perpendiculaire à la tangente.



Réponse: ...

12. Vous avez 12 pièces en votre possession, dont 5 proviennent de Belgique, 3 des Pays-Bas et 4 de France. Toutes les pièces d'un même pays sont considérées comme identiques. Si vous lancez toutes les pièces en même temps et n'en attrapez que trois, quelle est la probabilité d'avoir trois pièces identiques ?
(Chaque pièce individuelle a la même probabilité d'être attrapée.)

    Réponse: ...

13. Un tournoi de football se joue entre 10 équipes. Il y a 2 poules[2] de 5 équipes. Dans une poule, chaque équipe joue une fois contre toutes les autres équipes de la même poule. Les vainqueurs de chaque poule jouent la finale. Combien de matchs sont joués au total ?

    Réponse: ...

14. Déterminez la valeur positive de A de sorte que $3\sin x + 4\cos x = A\sin(x+\phi)$, avec ϕ la valeur d'un angle (que ne vous devez pas déterminer).

    Réponse: $A = \ldots$

15. Calculez l'aire comprise entre la parabole $y^2 = 4x$ et la droite $y = 2x - 4$.

    Réponse: ...

16. Divisez le nombre 12 en deux parties positives x et y (i.e. $x + y = 12$) telles que $(x^2 + y^2)$ soit maximal. Calculez $x \cdot y$.

    Réponse: $x \cdot y = \ldots$

[2] Lorsqu'il est utilisé dans le domaine sportif, le terme poule est le plus souvent synonyme de groupe.

17. Quelle est la plus petite valeur positive de x pour laquelle
$\sin x \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) = 2$?

    Convertissez votre réponse en degrés.

    Réponse: $x = \ldots^\circ$

18. Si $f''(x) = 30x^4 + 12x$ et $f'(1) = 12$, combien vaut alors $f(0) - f(-1)$?

    (Ici, f' est la dérivée première de f et f'' est la dérivée seconde de f, c'est-à-dire la dérivée de f'.)

    Réponse: $f(0) - f(-1) = \ldots$

19. On donne: $f(x) = x^3 - 7x^2 - 4x + 28$

    Soient s la somme des racines et p le produit des racines. Combien vaut $\frac{s}{p}$?

    Réponse: $\ldots$

20. On donne: $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 36x + 5$

    Déterminez k de sorte que f atteint un extremum pour $x = 2$ et donnez la nature de cet extremum.

    Réponses:
    $k = \ldots$
    Extremum = maximum/minimum (biffer la mauvaise réponse)

Epreuve commune 2020
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série B - Partie 1
10 Questions

- Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
- Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis.
- Les réponses aux questions sont valorisées de la façon suivante:
  - Vous démarrez avec 10 sur 50.
  - Une réponse correcte vous donne 4 points.
  - Une réponse fautive vous fait perdre un point.
  - Une réponse blanche ne modifie pas le résultat.
- Réponses sur la feuille de réponse.

MC1b Nombre de licences délivrées par brigade en 2019.

	2019
Brigade 1	2380
Brigade 2	3340
Brigade 3	3860
Brigade 4	1920

En 2019, il était prévu qu'en 2020, le nombre total de licences délivrées, pour les quatre brigades confondues, augmenterait de 44% par rapport à 2019. Dans la Brigade 2 et dans la Brigade 3 une augmentation de 30% est prévue pour 2020. En 2020, la Brigade 1 délivrera deux fois plus de licences que la Brigade 4. Selon cette estimation, combien de licences seront délivrées dans la Brigade 1 et la Brigade 4 en 2020 ?

Réponse:

A) En 2020, selon cette estimation, 3280 licences seront délivrées dans la Brigade 1, et 1640 dans la Brigade 4.

B) En 2020, selon cette estimation, 4800 licences seront délivrées dans la Brigade 1, et 2400 dans la Brigade 4.

C) En 2020, selon cette estimation, 4120 licences seront délivrées dans la Brigade 1, et 2060 dans la Brigade 4.

D) En 2020, selon cette estimation, 3720 licences seront délivrées dans la Brigade 1, et 1860 dans la Brigade 4.

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

MC2b Combien de nombres rationnels y a-t-il dans la liste ci-dessous ?

- $12^{\frac{0}{1}}$
- $(-36)^{\frac{1}{2}}$
- $27^{\frac{2}{3}}$
- $30^{\frac{3}{4}}$
- $25^{\frac{3}{2}}$
- $16^{\frac{4}{3}}$
- $16^{\frac{5}{4}}$

Réponse:

A) 2

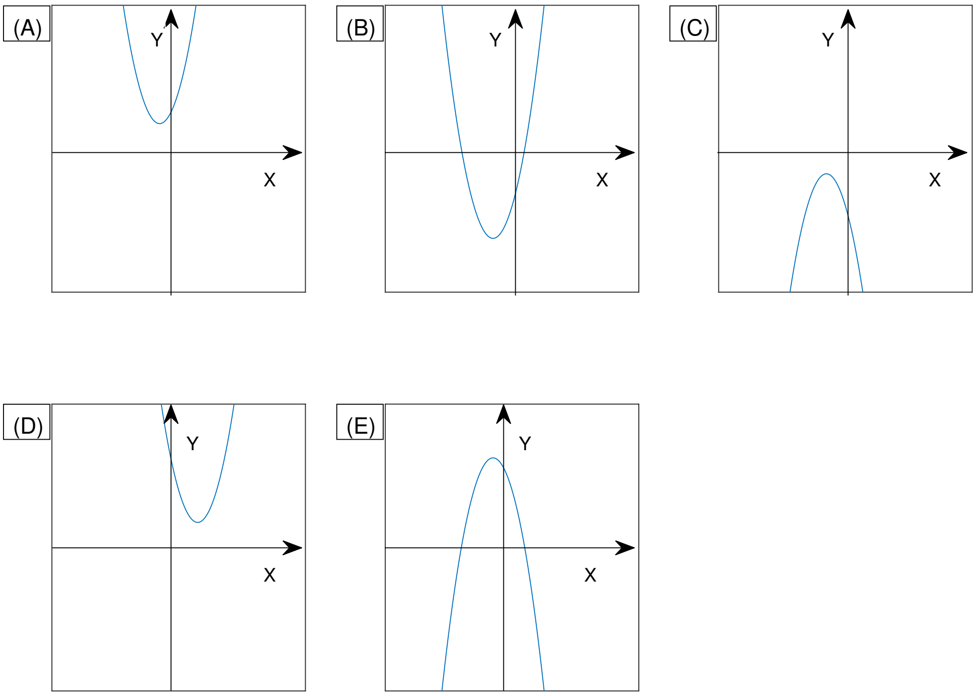
B) 3

C) 4

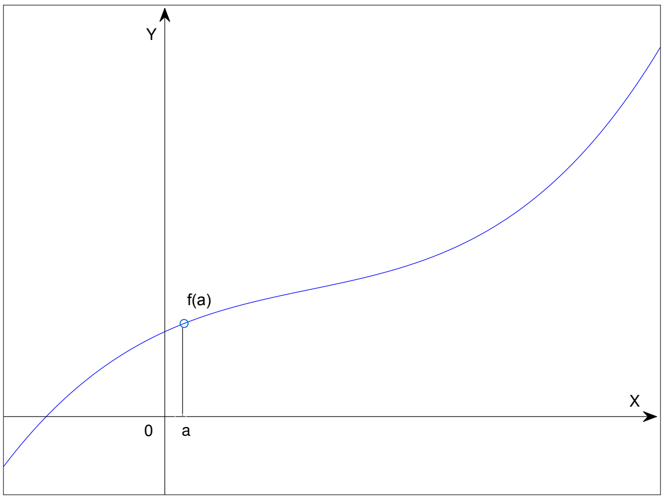
D) 5

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

MC3b Laquelle des paraboles suivantes est le graphique d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour laquelle $a < 0, b < 0, c < 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$?



MC4b Considérons le graphique de la fonction $y = f(x)$ dans la figure ci-dessous. (f' est la dérivée première de f et f'' est la dérivée seconde de f.)



Laquelle des expressions suivantes est correcte ?

A) $f(a) < 0, f'(a) > 0, f''(a) > 0$

B) $f(a) < 0, f'(a) > 0, f''(a) < 0$

C) $f(a) > 0, f'(a) < 0, f''(a) > 0$

D) $f(a) > 0, f'(a) > 0, f''(a) < 0$

E) $f(a) > 0, f'(a) > 0, f''(a) > 0$

MC5b Soit $f(x) = 2x^2 - x - 2$. Laquelle des expressions suivantes est correcte ?

A) f a un maximum en $x = \frac{1}{4}$ et un zéro dans l'intervalle $[-1, -\frac{3}{4}]$.

B) f a un zéro dans l'intervalle $[\frac{5}{4}, \frac{6}{4}]$ et un zéro dans l'intervalle $[-\frac{6}{4}, -\frac{5}{4}]$.

C) f a un minimum en $x = -\frac{1}{4}$ et un zéro dans l'intervalle $[-1, -\frac{3}{4}]$.

D) f n'a pas de zéros en dehors de l'intervalle $[-\frac{5}{4}, \frac{6}{4}]$.

E) Toutes les expressions ci-dessus sont incorrectes.

MC6b Si $\frac{1}{2} < (|\cos(x)|)^2 < \frac{3}{4}$, à quels quadrants peut alors appartenir $2x$?

Réponse:

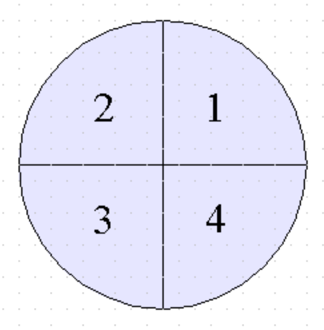
A) Au quadrant 1 ou 2, mais pas aux autres quadrants.

B) Au quadrant 1 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

C) Au quadrant 2 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

D) Au quadrant 3 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

E) Toutes les expressions ci-dessus sont incorrectes.


2
1
3
4

MC7b Lequel des cercles suivants dans le plan n'a pas d'intersection avec l'axe Ox

A) $(x+5)^2+(y-3)^2=16$
B) $(x-1)^2+(y-2)^2=9$
C) $(x-4)^2+(y-3)^2=25$
D) $(x+2)^2+(y+2)^2=9$
E) Tous les cercles ci-dessus coupent l'axe Ox.

MC8b Laquelle des expressions suivantes est correcte ?

A) $\log\left(2^3\right)=(\log(2))^3$
B) $\log(6)=\log(2)\log(3)$
C) $\log\left(10^3\right)\log(2)=\log\left(2^3\right)$
D) $\log(5)=\log(2)\log(3)$
E) Aucune des expressions ci-dessus n'est correcte.

MC9b Combien de nombres naturels sont une solution de $x^2 \leq 4x$?

Réponse:

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) Plus de 6.

MC10b Si $|x-\frac{3}{2}|<\frac{5}{2}$ et $(y-4)^2<1$, alors combien des expressions suivantes sont correctes pour tout x et pour tout y ?

- $x^2\,y \in [5,80]$
- $x^2\,y \notin [5,80]$
- $|x|\,y > xy$
- $|x+y-12|>3$
- $xy>0$

Réponse:

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

Epreuve commune 2020

Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie

Série B - Partie 1

10 Questions

MC1b Nombre de licences délivrées par brigade en 2019.

	2019
Brigade 1	2380
Brigade 2	3340
Brigade 3	3860
Brigade 4	1920

En 2019, il était prévu qu'en 2020, le nombre total de licences délivrées, pour les quatre brigades confondues, augmenterait de 44% par rapport à 2019. Dans la Brigade 2 et dans la Brigade 3 une augmentation de 30% est prévue pour 2020. En 2020, la Brigade 1 délivrera deux fois plus de licences que la Brigade 4. Selon cette estimation, combien de licences seront délivrées dans la Brigade 1 et la Brigade 4 en 2020 ?

Réponse:

A) En 2020, selon cette estimation, 3280 licences seront délivrées dans la Brigade 1, et 1640 dans la Brigade 4.

B) En 2020, selon cette estimation, 4800 licences seront délivrées dans la Brigade 1, et 2400 dans la Brigade 4.

C) En 2020, selon cette estimation, 4120 licences seront délivrées dans la Brigade 1, et 2060 dans la Brigade 4.

D) En 2020, selon cette estimation, 3720 licences seront délivrées dans la Brigade 1, et 1860 dans la Brigade 4.

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

MC2b Combien de nombres rationnels y a-t-il dans la liste ci-dessous ?

- $12^{\frac{0}{1}}$
- $(-36)^{\frac{1}{2}}$
- $27^{\frac{2}{3}}$
- $30^{\frac{3}{4}}$
- $25^{\frac{3}{2}}$
- $16^{\frac{4}{3}}$
- $16^{\frac{5}{4}}$

Réponse:

A) 2

B) 3

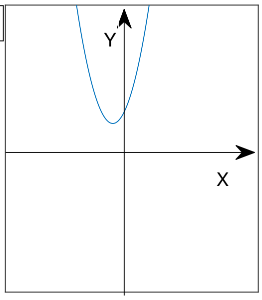
C) 4

D) 5

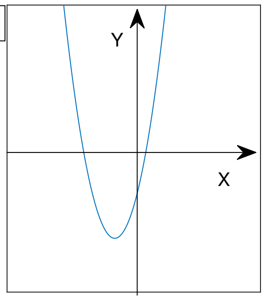
E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte.

MC3b Laquelle des paraboles suivantes est le graphique d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour laquelle $a < 0, b < 0, c < 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$?

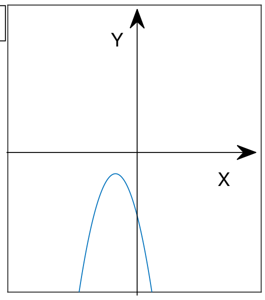
(A)



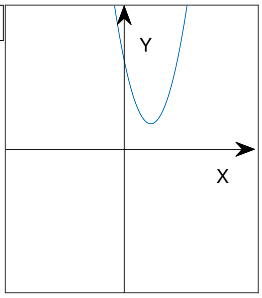
(B)



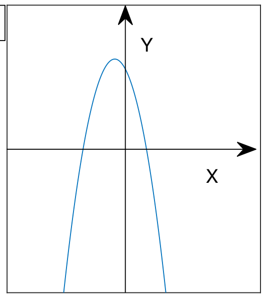
(C)



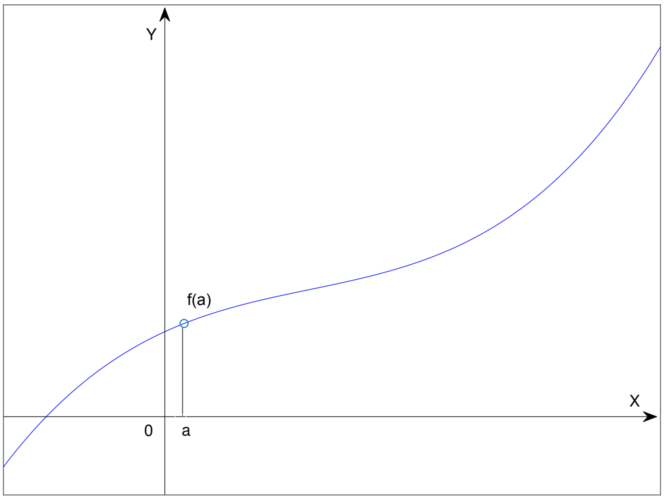
(D)



(E)



MC4b Considérons le graphique de la fonction $y = f(x)$ dans la figure ci-dessous. (f' est la dérivée première de f et f'' est la dérivée seconde de f.)



Laquelle des expressions suivantes est correcte ?

A) $f(a) < 0, f'(a) > 0, f''(a) > 0$

B) $f(a) < 0, f'(a) > 0, f''(a) < 0$

C) $f(a) > 0, f'(a) < 0, f''(a) > 0$

D) $f(a) > 0, f'(a) > 0, f''(a) < 0$

E) $f(a) > 0, f'(a) > 0, f''(a) > 0$

MC5b Soit $f(x) = 2x^2 - x - 2$. Laquelle des expressions suivantes est correcte ?

A) f a un maximum en $x = \frac{1}{4}$ et un zéro dans l'intervalle $[-1, -\frac{3}{4}]$.

B) f a un zéro dans l'intervalle $[\frac{5}{4}, \frac{6}{4}]$ et un zéro dans l'intervalle $[-\frac{6}{4}, -\frac{5}{4}]$.

C) f a un minimum en $x = -\frac{1}{4}$ et un zéro dans l'intervalle $[-1, -\frac{3}{4}]$.

D) f n'a pas de zéros en dehors de l'intervalle $[-\frac{5}{4}, \frac{6}{4}]$.

E) Toutes les expressions ci-dessus sont incorrectes.

MC6b Si $\frac{1}{2} < (|\cos(x)|)^2 < \frac{3}{4}$, à quels quadrants peut alors appartenir $2x$?

Réponse:

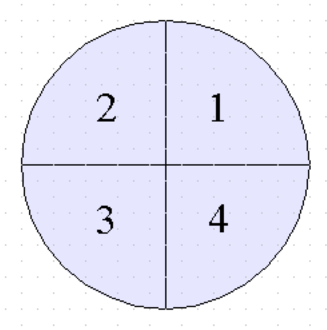
A) Au quadrant 1 ou 2, mais pas aux autres quadrants.

B) Au quadrant 1 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

C) Au quadrant 2 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

D) Au quadrant 3 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

E) Toutes les expressions ci-dessus sont incorrectes.



MC7b Lequel des cercles suivants dans le plan n'a pas d'intersection avec l'axe Ox

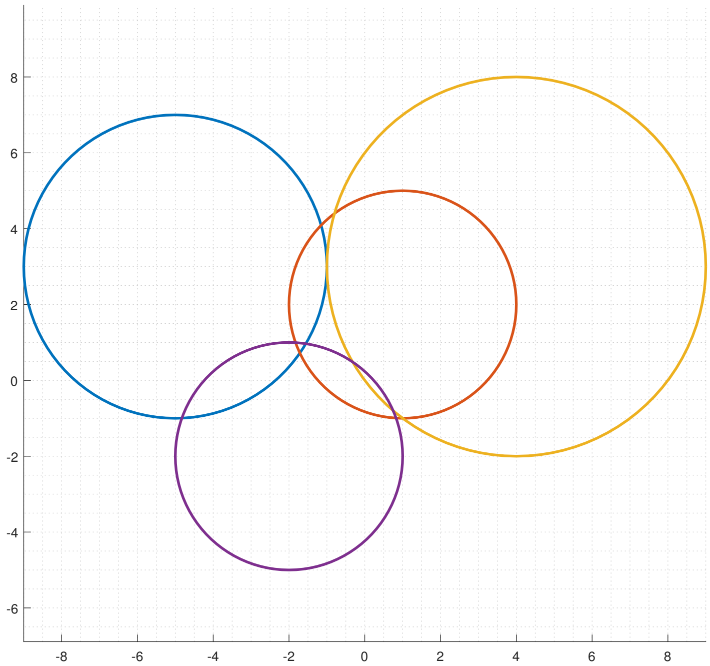
A) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 16$

B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

C) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

D) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$

E) Tous les cercles ci-dessus coupent l'axe Ox.


8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8

MC8b Laquelle des expressions suivantes est correcte ?

A) $\log\left(2^3\right) = (\log(2))^3$

B) $\log(6) = \log(2)\log(3)$

C) $\log\left(10^3\right)\log(2) = \log\left(2^3\right)$

D) $\log(5) = \log(2)\log(3)$

E) Aucune des expressions ci-dessus n'est correcte.

MC9b Combien de nombres naturels sont une solution de $x^2 \leq 4x$?

Réponse:

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) Plus de 6.

MC10b Si $|x-\frac{3}{2}|<\frac{5}{2}$ et $(y-4)^2<1$, alors combien des expressions suivantes sont correctes pour tout x et pour tout y ?

- $x^2\,y \in [5,80]$
- $x^2\,y \notin [5,80]$
- $|x|\,y > xy$
- $|x+y-12| > 3$
- $xy > 0$

Réponse:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Epreuve commune 2020
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série B - Partie 2
10 Questions

- Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
- Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis.
- Les réponses aux questions sont valorisées de la façon suivante:
  - Vous démarrez avec 0 sur 50.
  - Une réponse correcte vous donne 5 points.
  - Une réponse blanche ou une réponse fautive ne modifie pas le résultat.
- Réponses sur la feuille de réponse.

O1b Votre unité logistique emploie 32 personnes.

Combien de personnes dans votre unité logistique sont à la fois non qualifiées sur bus et non qualifiées sur char ?

Une personne seule possède un permis de conduire pour les bus, les camions et les chars. Deux personnes ont un permis pour les bus et les camions, mais pas pour les chars. Quinze personnes ont un permis de conduire pour les chars, cinq d'entre elles ont également un permis de conduire pour les camions. Douze personnes ont un permis de conduire pour les bus ; deux d'entre elles n'ont pas de permis de conduire pour les chars.

Combien de personnes dans votre unité logistique n'ont pas de permis de conduire ni pour les bus ni pour les chars ?

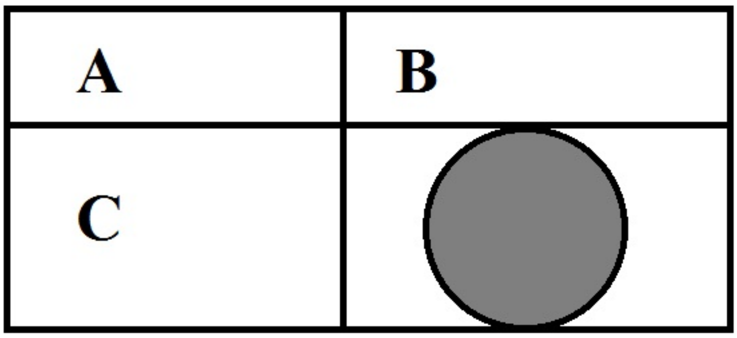
Réponse: ... personnes

O2b Vous avez 12 pièces de monnaie en votre possession, dont 5 pièces de Belgique, 3 pièces des Pays-Bas et 4 pièces de France. Si vous lancez toutes les pièces en même temps et que vous n'en rattrapez que quatre, quelle est la probabilité que vous ayez exactement trois pièces de Belgique ? (Chaque pièce a la même probabilité d'être collectée).

Arrondissez votre réponse au pourcentage entier le plus proche, c'est-à-dire sans décimales.

Réponse = ... %

O3b Nous divisons un rectangle en quatre petits rectangles, comme le montre la figure ci-dessous. Si le rectangle A a une superficie de 18 m^2 et une périmètre de 18 m, le rectangle B a une superficie de 42 m^2 et le rectangle C a une superficie de 15 m^2 et une périmètre de 16 m, quelle est donc la circonférence du plus grand cercle (en gris sur la figure) se trouvant entièrement dans le rectangle inférieur droit ? Donnez votre réponse, exprimée en mètres, arrondie au nombre entier le plus proche. (La figure n'est pas à l'échelle.)



Réponse = ... m

O4b On change un rectangle en rendant son côté long 20 % plus long et son côté court 10 % plus court. De combien de % la surface de ce rectangle augmentera-t-elle ou diminuera-t-elle ? Réponse en pourcentage, arrondie à une décimale près.

Réponse = ...% plus petit/plus grand (Biffer la mention inutile.)

O5b Soit $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = 2x + 1$. Combien vaut $f(g(2))$?

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $f(g(2)) = \ldots$

O6b Soit $f(x) = -2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^6$
et g la dérivée de f.
Combien vaut $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$

O7b Déterminez a et b de sorte que le graphique de la fonction de $f(x) = 3x^2 - a + bx + 4$ ait une tangente horizontale en $x = 1$ et un zéro en $x = -1$.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $a = \ldots$, $b = \ldots$

O8b Soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite qui passe par le point $(1, -2)$ et qui est perpendiculaire à la droite $-2x + 3y - 4 = 0$. Déterminez a et b.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $a = \dots$, $b = \dots$

O9b $k = \int_{-\pi/4}^{\pi} (-3\cos(2x))\ \mathrm{d}x - \int_1^3 \left(3x^{-2}\right) \mathrm{d}x$.
Déterminez k.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $k = \dots$

O10b Calculez la surface comprise entre les graphiques des fonctions
$f(x) = |5x|$ et $g(x) = -x + 10$.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: Surface $= \dots$.

Epreuve commune 2020
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série B - Partie 2
10 Questions

O1b Votre unité logistique emploie 32 personnes.

Combien de personnes dans votre unité logistique sont à la fois non qualifiées sur bus et non qualifiées sur char ?

Une personne seule possède un permis de conduire pour les bus, les camions et les chars. Deux personnes ont un permis pour les bus et les camions, mais pas pour les chars. Quinze personnes ont un permis de conduire pour les chars, cinq d'entre elles ont également un permis de conduire pour les camions. Douze personnes ont un permis de conduire pour les bus ; deux d'entre elles n'ont pas de permis de conduire pour les chars.

Combien de personnes dans votre unité logistique n'ont pas de permis de conduire ni pour les bus ni pour les chars ?

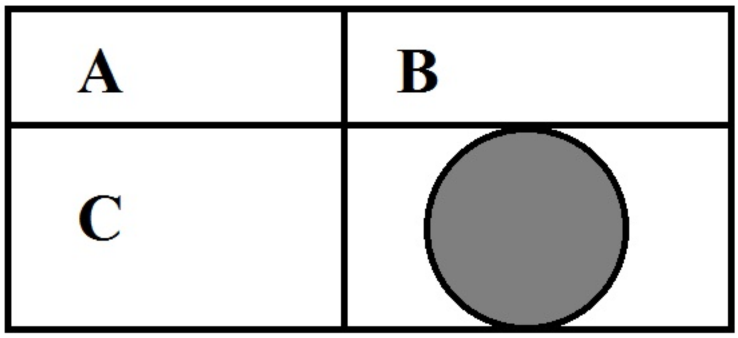
Réponse: ... personnes

O2b Vous avez 12 pièces de monnaie en votre possession, dont 5 pièces de Belgique, 3 pièces des Pays-Bas et 4 pièces de France. Si vous lancez toutes les pièces en même temps et que vous n'en rattrapez que quatre, quelle est la probabilité que vous ayez exactement trois pièces de Belgique ? (Chaque pièce a la même probabilité d'être collectée).

Arrondissez votre réponse au pourcentage entier le plus proche, c'est-à-dire sans décimales.

Réponse = $\ldots\%$

O3b Nous divisons un rectangle en quatre petits rectangles, comme le montre la figure ci-dessous. Si le rectangle A a une superficie de 18 m^2 et une périmètre de 18 m, le rectangle B a une superficie de 42 m^2 et le rectangle C a une superficie de 15 m^2 et une périmètre de 16 m, quelle est donc la circonférence du plus grand cercle (en gris sur la figure) se trouvant entièrement dans le rectangle inférieur droit ? Donnez votre réponse, exprimée en mètres, arrondie au nombre entier le plus proche. (La figure n'est pas à l'échelle.)



Réponse = ... m

O4b On change un rectangle en rendant son côté long 20 % plus long et son côté court 10 % plus court. De combien de % la surface de ce rectangle augmentera-t-elle ou diminuera-t-elle ? Réponse en pourcentage, arrondie à une décimale près.

Réponse = . . . % plus petit/plus grand (Biffer la mention inutile.)

O5b Soit $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = 2x + 1$. Combien vaut $f(g(2))$?

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $f(g(2)) = \ldots$

O6b Soit $f(x) = -2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^6$
et g la dérivée de f.
Combien vaut $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$

O7b Déterminez a et b de sorte que le graphique de la fonction de $f(x) = 3x^2 - a + bx + 4$ ait une tangente horizontale en $x = 1$ et un zéro en $x = -1$.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $a = \dots$, $b = \dots$

O8b Soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite qui passe par le point $(1, -2)$ et qui est perpendiculaire à la droite $-2x + 3y - 4 = 0$. Déterminez a et b.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $a = \dots$, $b = \dots$

O9b $k = \int_{-\pi/4}^{\pi} \left(-3\cos(2x)\right)\, \mathrm{d}x - \int_{1}^{3} \left(3x^{-2}\right) \mathrm{d}x$.
Déterminez k.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $k = \ldots$

O10b Calculez la surface comprise entre les graphiques des fonctions
$f(x) = |5x|$ et $g(x) = -x + 10$.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: Surface = ...

Epreuve commune 2021
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série A - Partie 1
10 Questions

- Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
- Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis.
- Les réponses aux questions sont valorisées de la façon suivante:
  - Vous démarrez avec 10 sur 50.
  - Une réponse correcte vous donne 4 points.
  - Une réponse fautive vous fait perdre un point.
  - Une abstention ne modifie pas le résultat.
- Réponses sur la feuille de réponses.

MC1a Nombre d'employés permanents et freelance chez NewTechInc :

Nombre d'employés permanents	260
Nombre d'employés free-lance	25

12 % des femmes travaillent en tant que free-lance, tandis que 40 % des free-lances sont des hommes. Quel pourcentage du nombre total d'employés sont des hommes (arrondi au nombre entier le plus proche) ?

Réponse:

A) 51%

B) 53%

C) 56%

D) 58%

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte

MC2a Combien de nombres entiers positifs différents y a-t-il dans la liste ci-dessous (après calcul) ?

- 3^{27}
- $(3^3)^3$
- $3^{(3^3)}$
- 27^3
- $(-27)^3$
- $(-27)^{(-3)}$
- $(27)^{(-3)}$
- $27^{\frac{1}{3}}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^9$
- $(3^3) \cdot (3^3) + (3^3) \cdot (3^3) + (3^3) \cdot (3^3)$
- $(3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3)^3$
- $9^{\frac{7}{2}}$

Réponse:

A) 2

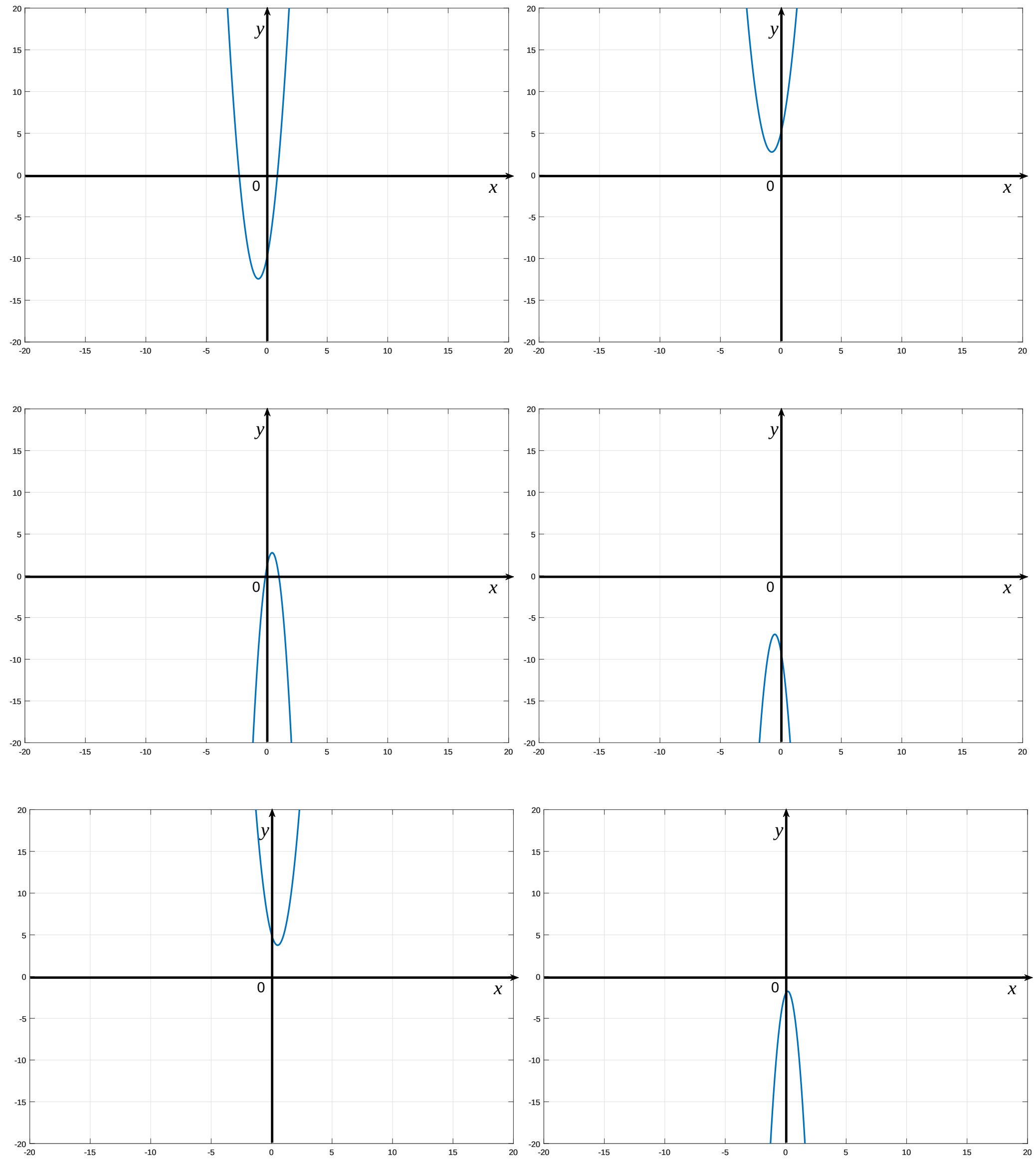
B) 3

C) 4

D) 5

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte

MC3a Vous trouverez ci-dessous les paraboles qui sont le graphique d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a, b, c \in \mathbb{R})$.



Parmi les cas suivants, lequel n'a pas été représenté dans l'une des figures ci-dessus?

A) $a > 0$; $(a \cdot b) > 0$; $c < 0$

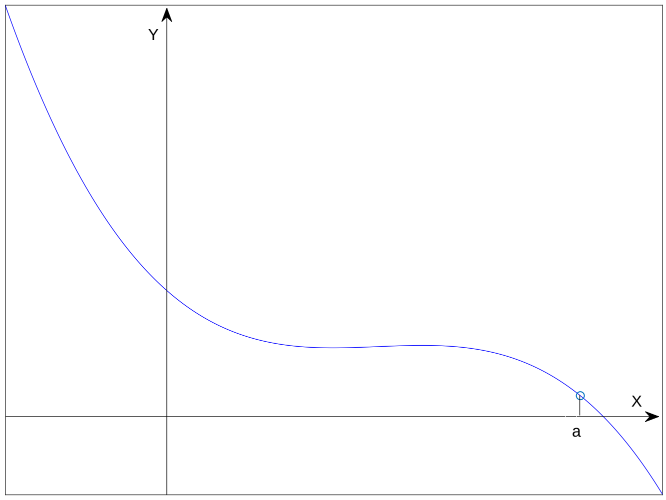
B) $a < 0$; $(a \cdot b) > 0$; $c < 0$

C) $a > 0$; $(a \cdot b) < 0$; $c > 0$

D) $a > 0$; $(a \cdot b) > 0$; $c > 0$

E) Tous les cas ci-dessus sont représentés parmi les figures proposées.

MC4a Considérons le graphique de la fonction $y = f(x)$ dans la figure ci-dessous.



Laquelle des affirmations suivantes est correcte ? (f' est la dérivée première de f et f'' est la dérivée seconde de f.)

A) $f(a) < 0, f'(a) < 0, f''(a) < 0$

B) $f(a) > 0, f'(a) < 0, f''(a) < 0$

C) $f(a) < 0, f'(a) > 0, f''(a) < 0$

D) $f(a) > 0, f'(a) < 0, f''(a) > 0$

E) $f(a) > 0, f'(a) > 0, f''(a) > 0$

MC5a Soit $f(x) = 4x^2 + 4x - 2$. Indiquez l'affirmation qui n'est pas correcte.

A) f possède un minimum pour $x < 0$.

B) f prend aussi bien des valeurs négatives que positives dans l'intervalle $[-4, 4]$.

C) f ne possède pas de minimum pour $x > -1$

D) f possède un zéro aussi bien pour $x > 0$ que pour $x < 0$.

Si vous pensez que toutes les affirmations ci-dessus sont correctes, répondez par "E".

MC6a Si $0 < \left(\left| \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| \right)^2 < 3$, à quels quadrants pourrait appartenir x ?

Réponse:

A) Au quadrant 1 ou 2, mais pas aux autres quadrants.

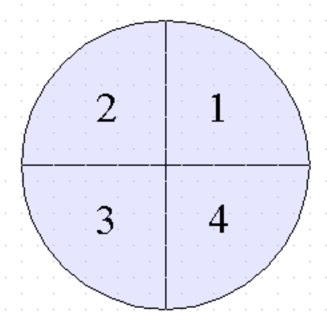
B) Au quadrant 1 ou 3, mais pas aux autres quadrants.

C) Au quadrant 2 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

D) Au quadrant 3 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte

La numérotation des quadrants est donnée dans la figure ci-dessous.



MC7a Lequel des cercles suivants dans le plan n'a pas d'intersection avec l'axe x ?

A) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$

B) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

C) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$

D) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$

E) Tous les cercles ont une intersection avec l'axe des x.

MC8a Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A) $\log\left(6^4\right) = (\log(6))^4$

B) $\log(24) = \log(6)\log(4)$

C) $\log(36) = 2(\log(2) + \log(4))$

D) $\log(36) = 2(\log(2) + \log(3))$

E) Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte

MC9a Combien d'entiers sont des solutions de $\left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq 2x$?

Réponse:

A) moins de 3

B) plus de 2, mais moins de 6

C) plus de 5, mais moins de 9

D) plus de 8, mais moins de 12

E) plus de 11

MC10a Combien de valeurs parmi les suivantes satisfont à l'inégalité suivante :
$1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3 \leq 4$?

- $x = 0$
- $x = \frac{\pi}{4}$
- $x = \frac{2\pi}{4}$
- $x = \frac{3\pi}{4}$
- $x = \pi$
- $x = \frac{5\pi}{4}$
- $x = \frac{6\pi}{4}$
- $x = \frac{7\pi}{4}$
- $x = 2\pi$

Réponse:

A) aucune valeur

B) une seule valeur

C) plus de 1, mais moins de 4

D) plus de 3, mais pas toutes

E) toutes les valeurs.

Epreuve commune 2021
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série A - Partie 1
10 Questions

MC1a Nombre d'employés permanents et freelance chez NewTechInc :

Nombre d'employés permanents	260
Nombre d'employés free-lance	25

12 % des femmes travaillent en tant que free-lance, tandis que 40 % des free-lances sont des hommes. Quel pourcentage du nombre total d'employés sont des hommes (arrondi au nombre entier le plus proche) ?

Réponse:

A) 51%

B) 53%

C) 56%

D) 58%

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte

MC2a Combien de nombres entiers positifs différents y a-t-il dans la liste ci-dessous (après calcul) ?

- 3^{27}
- $(3^3)^3$
- $3^{(3^3)}$
- 27^3
- $(-27)^3$
- $(-27)^{(-3)}$
- $(27)^{(-3)}$
- $27^{\frac{1}{3}}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^9$
- $(3^3) \cdot (3^3) + (3^3) \cdot (3^3) + (3^3) \cdot (3^3)$
- $(3^3 \cdot 3^3 \cdot 3^3)^3$
- $9^{\frac{7}{2}}$

Réponse:

A) 2

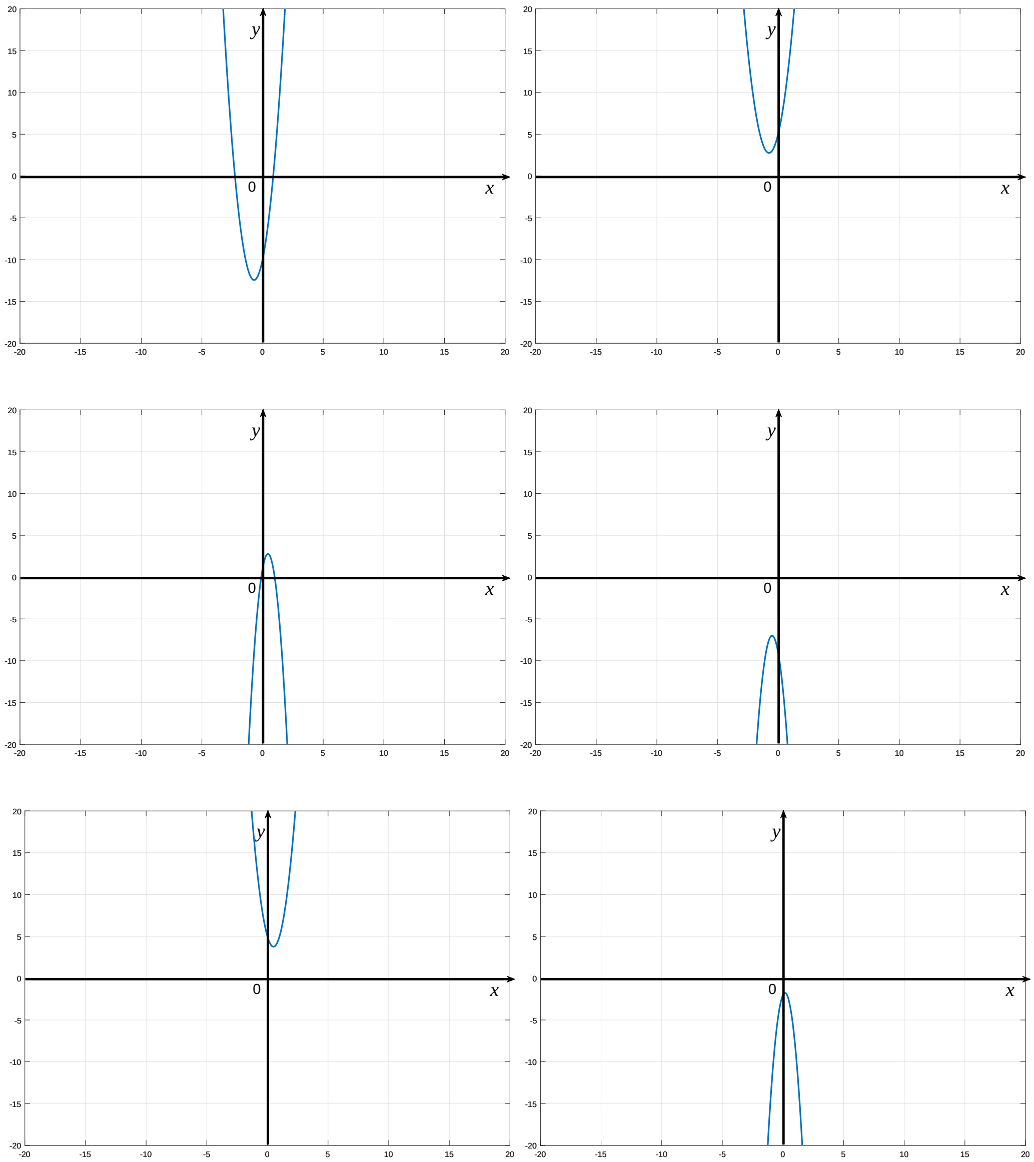
B) 3

C) 4

D) 5

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte

MC3a Vous trouverez ci-dessous les paraboles qui sont le graphique d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.



Parmi les cas suivants, lequel n'a pas été représenté dans l'une des figures ci-dessus?

A) $a > 0$; $(a \cdot b) > 0$; $c < 0$

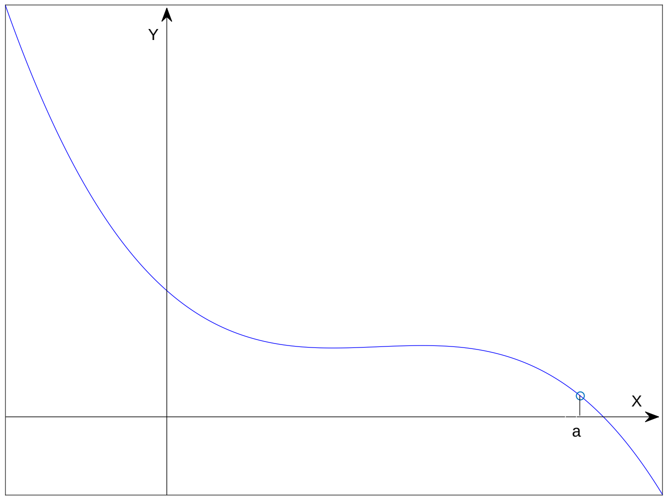
B) $a < 0$; $(a \cdot b) > 0$; $c < 0$

C) $a > 0$; $(a \cdot b) < 0$; $c > 0$

D) $a > 0$; $(a \cdot b) > 0$; $c > 0$

E) Tous les cas ci-dessus sont représentés parmi les figures proposées.

MC4a Considérons le graphique de la fonction $y = f(x)$ dans la figure ci-dessous.



Laquelle des affirmations suivantes est correcte ? (f' est la dérivée première de f et f'' est la dérivée seconde de f.)

A) $f(a) < 0, f'(a) < 0, f''(a) < 0$

B) $f(a) > 0, f'(a) < 0, f''(a) < 0$

C) $f(a) < 0, f'(a) > 0, f''(a) < 0$

D) $f(a) > 0, f'(a) < 0, f''(a) > 0$

E) $f(a) > 0, f'(a) > 0, f''(a) > 0$

MC5a Soit $f(x) = 4x^2 + 4x - 2$. Indiquez l'affirmation qui n'est pas correcte.

A) f possède un minimum pour $x < 0$.

B) f prend aussi bien des valeurs négatives que positives dans l'intervalle $[-4, 4]$.

C) f ne possède pas de minimum pour $x > -1$

D) f possède un zéro aussi bien pour $x > 0$ que pour $x < 0$.

Si vous pensez que toutes les affirmations ci-dessus sont correctes, répondez par "E".

MC6a Si $0 < \left(\left|\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)^2 < 3$, à quels quadrants pourrait appartenir x ?

Réponse:

A) Au quadrant 1 ou 2, mais pas aux autres quadrants.

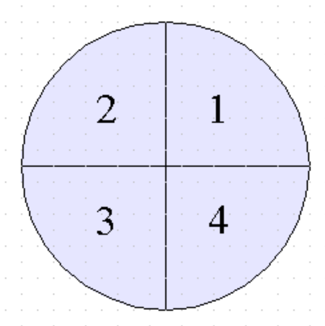
B) Au quadrant 1 ou 3, mais pas aux autres quadrants.

C) Au quadrant 2 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

D) Au quadrant 3 ou 4, mais pas aux autres quadrants.

E) Aucune des réponses ci-dessus n'est correcte

La numérotation des quadrants est donnée dans la figure ci-dessous.



MC7a Lequel des cercles suivants dans le plan n'a pas d'intersection avec l'axe x ?

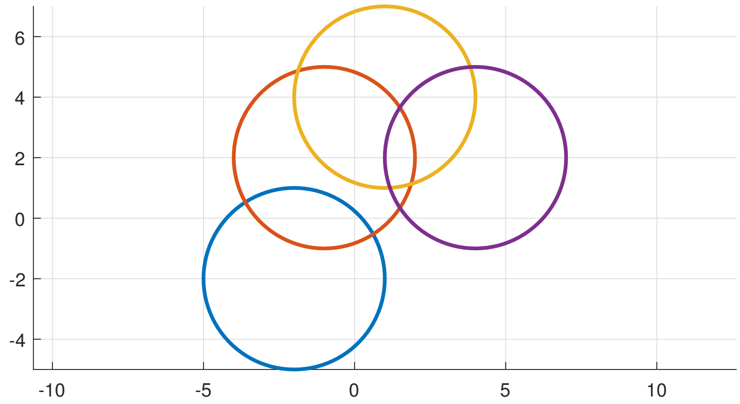
A) $(x+2)^2+(y+2)^2=9$

B) $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

C) $(x-1)^2+(y-4)^2=9$

D) $(x-4)^2+(y-2)^2=9$

E) Tous les cercles ont une intersection avec l'axe des x.


6
4
2
0
-2
-4
-10
-5
0
5
10

MC8a Laquelle des affirmations suivantes est correcte ?

A) $\log\left(6^4\right) = (\log(6))^4$

B) $\log(24) = \log(6)\log(4)$

C) $\log(36) = 2(\log(2) + \log(4))$

D) $\log(36) = 2(\log(2) + \log(3))$

E) Aucune des affirmations ci-dessus n'est correcte

MC9a Combien d'entiers sont des solutions de $\left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq 2x$?

Réponse:

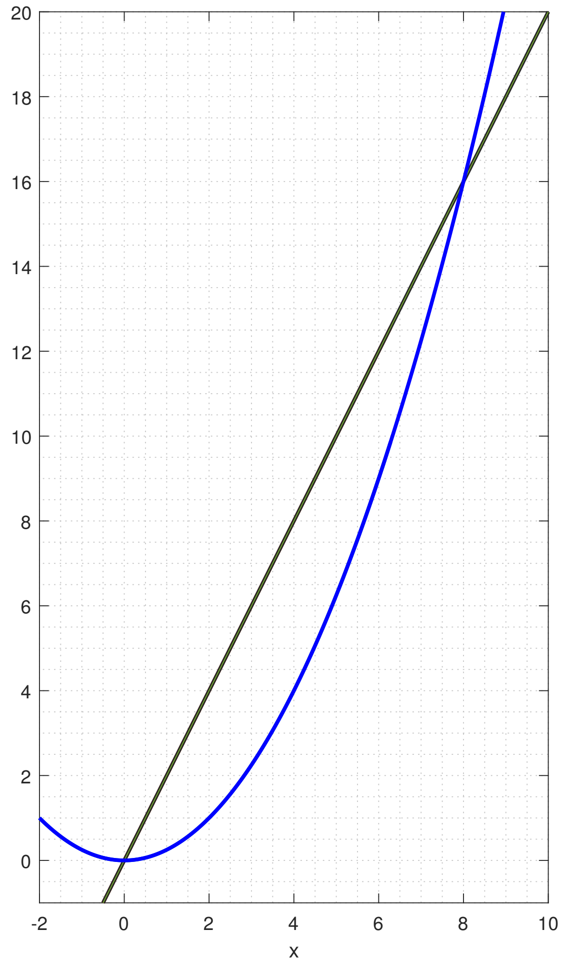
A) moins de 3

B) plus de 2, mais moins de 6

C) plus de 5, mais moins de 9

D) plus de 8, mais moins de 12

E) plus de 11


20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10
x

MC10a Combien de valeurs parmi les suivantes satisfont à l'inégalité suivante :
$1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3 \leq 4$?

- $x = 0$
- $x = \frac{\pi}{4}$
- $x = \frac{2\pi}{4}$
- $x = \frac{3\pi}{4}$
- $x = \pi$
- $x = \frac{5\pi}{4}$
- $x = \frac{6\pi}{4}$
- $x = \frac{7\pi}{4}$
- $x = 2\pi$

Réponse:

A) aucune valeur

B) une seule valeur

C) plus de 1, mais moins de 4

D) plus de 3, mais pas toutes

E) toutes les valeurs.

- $x = 0 \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$
- $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$
- $x = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$
- $x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$
- $x = \pi \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$
- $x = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$
- $x = \frac{6\pi}{4} \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$
- $x = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$
- $x = 2\pi \Rightarrow \left|1 + \sin(x) + 2(\sin(x))^2 + 5(\sin(x))^3\right| =$

Epreuve commune 2021
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série A - Partie 2
10 Questions

- Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
- Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis.
- Les réponses aux questions sont valorisées de la façon suivante:
  - Vous démarrez avec 0 sur 50.
  - Une réponse correcte vous donne 5 points.
  - Une abstention ou une réponse fautive ne modifie pas le résultat.
- Réponses sur la feuille de réponses.

O1a 35 étudiants passent un test comportant trois questions (A, B et C). Deux élèves ont des réponses correctes à toutes les questions. Sept élèves ont une réponse correcte aux questions B et C, mais pas à la question A. Quatorze élèves ont une réponse correcte à la question A ; parmi eux, 7 ont également une réponse correcte à la question C. Vingt élèves ont une réponse correcte à la question B; quinze d'entre eux n'ont pas de réponse correcte à la question A. Un seul étudiant n'a pas de réponse correcte du tout.

Combien y a-t-il d'élèves qui ont seulement eu une réponse correcte à la question C?

Réponse: . . . étudiant(s)

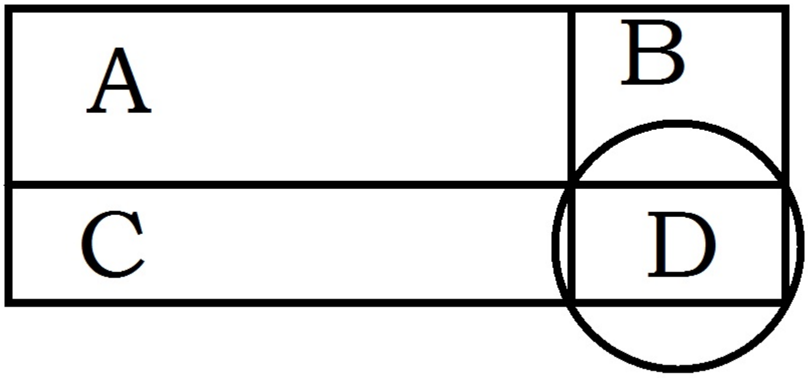
O2a Vous avez 9 pièces de monnaie en votre possession, dont 2 pièces de Belgique, 3 pièces des Pays-Bas et 4 pièces de France. Si vous lancez toutes les pièces en même temps et que vous n'en attrapez que deux dans chaque main, quelle est la chance que vous ayez exactement deux pièces identiques dans au moins une de vos mains ? (Chaque pièce a la même probabilité d'être attrapée.)

Arrondissez votre réponse au pourcentage entier le plus proche, donc sans décimales.

Réponse = . . . %

O3a Nous divisons un rectangle en quatre petits rectangles, comme le montre la figure ci-dessous.

Si le rectangle A a une superficie de 6 m^2 et un périmètre de 10 m, le rectangle B a une superficie de 10 m^2 et le rectangle C a une superficie de 12 m^2 et un périmètre de 14 m, alors quelle est la superficie du plus grand cercle qui passe par les 4 sommets du rectangle D ? Donnez votre réponse, exprimée en mètres carrés, arrondie au nombre entier le plus proche. Votre réponse ne doit pas contenir de racines carrées ou de π. (La figure n'est pas à l'échelle.)



Réponse = $\dots$ m^2

O4a Soient $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 + ax - 1$; alors quelle est la plus grande valeur de a pour laquelle $f(g(2)) = 226$?
(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées.)

Réponse: $a = \dots$

O5a Soient $f(x) = -\cos(x)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4$
et g la dérivée de f.
Combien vaut $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées, π, $\sin$, $\cos$, etc.)

Réponse : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots$

O6a Déterminez a et b de sorte que le graphique de la fonction de $f(x) = 2x^3 + a + bx + 4$ ait une tangente horizontale en $x = -2$ et en $x = 2$ et un zéro en $x = 3$.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées.)

Réponse: $a = \ldots$, $b = \ldots$

O7a Soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite passant par le point $(-1, 2)$ et qui est perpendiculaire à la droite $2x + 3y - 5 = 0$. Déterminez a et b.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.)

Réponse: $a = \ldots$, $b = \ldots$

O8a $\frac{13}{2} = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x + 4\right)\, \mathrm{d}x - \int_{k}^{1} \left(x^{-3}\right) \mathrm{d}x$.
Déterminez la plus grande valeur de k qui respecte la relation ci-dessus.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines, puissances, π, $\sin$, $\cos$, etc.)

Réponse: $k = \ldots$

O9a $I = \int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin(kx))\, \mathrm{d}x$.
Pour quelle valeur de $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la valeur I atteint-elle la plus petite valeur strictement positive?

Réponse: $k = \ldots$

O10a Calculer la superficie comprise entre les graphiques des fonctions
$f(x) = |2x + 1|$ et $g(x) = -|2x| + 2$.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible positive ou d'un nombre entier positif.)

Réponse: Surface $= \ldots$.

Epreuve commune 2021
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série A - Partie 2
10 Questions

O1a 35 étudiants passent un test comportant trois questions (A, B et C). Deux élèves ont des réponses correctes à toutes les questions. Sept élèves ont une réponse correcte aux questions B et C, mais pas à la question A. Quatorze élèves ont une réponse correcte à la question A ; parmi eux, 7 ont également une réponse correcte à la question C. Vingt élèves ont une réponse correcte à la question B; quinze d'entre eux n'ont pas de réponse correcte à la question A. Un seul étudiant n'a pas de réponse correcte du tout.

Combien y a-t-il d'élèves qui ont seulement eu une réponse correcte à la question C?

Réponse: … étudiant(s)

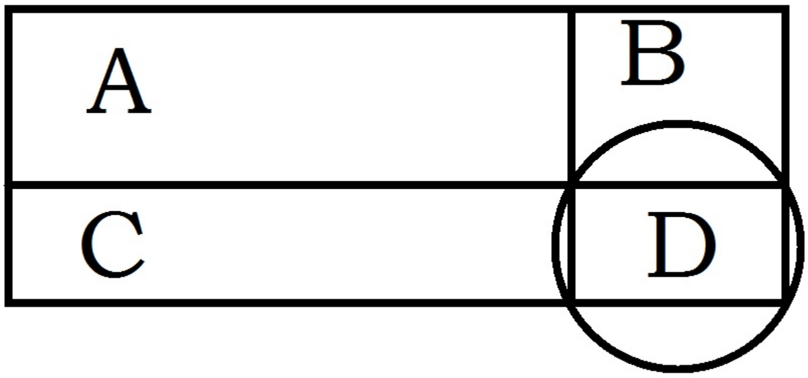
O2a Vous avez 9 pièces de monnaie en votre possession, dont 2 pièces de Belgique, 3 pièces des Pays-Bas et 4 pièces de France. Si vous lancez toutes les pièces en même temps et que vous n'en attrapez que deux dans chaque main, quelle est la chance que vous ayez exactement deux pièces identiques dans au moins une de vos mains ? (Chaque pièce a la même probabilité d'être attrapée.)

Arrondissez votre réponse au pourcentage entier le plus proche, donc sans décimales.

Réponse = $\ldots\%$

O3a Nous divisons un rectangle en quatre petits rectangles, comme le montre la figure ci-dessous.

Si le rectangle A a une superficie de 6 m^2 et un périmètre de 10 m, le rectangle B a une superficie de 10 m^2 et le rectangle C a une superficie de 12 m^2 et un périmètre de 14 m, alors quelle est la superficie du plus grand cercle qui passe par les 4 sommets du rectangle D ? Donnez votre réponse, exprimée en mètres carrés, arrondie au nombre entier le plus proche. Votre réponse ne doit pas contenir de racines carrées ou de π. (La figure n'est pas à l'échelle.)



Réponse = ... m^2

O4a Soient $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 + ax - 1$; alors quelle est la plus grande valeur de a pour laquelle $f(g(2)) = 226$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées.)

Réponse: $a = \ldots$

O5a Soient $f(x) = -\cos(x)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4$
et g la dérivée de f.
Combien vaut $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées, π, $\sin$, $\cos$, etc.)

Réponse : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$

O6a Déterminez a et b de sorte que le graphique de la fonction de $f(x) = 2x^3 + a + bx + 4$ ait une tangente horizontale en $x = -2$ et en $x = 2$ et un zéro en $x = 3$.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées.)

Réponse: $a = \dots$, $b = \dots$

O7a Soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite passant par le point $(-1, 2)$ et qui est perpendiculaire à la droite $2x + 3y - 5 = 0$. Déterminez a et b.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.)

Réponse: $a = \ldots$, $b = \ldots$

O8a $\frac{13}{2}=\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x+4\right)\,\mathrm{d}x-\int_{k}^{1}\left(x^{-3}\right)\mathrm{d}x\,.$
Déterminez la plus grande valeur de k qui respecte la relation ci-dessus.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines, puissances, π, $\sin$, $\cos$, etc.)

Réponse: $k=\ldots$

O9a $I = \int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin(kx))\ \mathrm{d}x$.

Pour quelle valeur de $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la valeur I atteint-elle la plus petite valeur strictement positive?

Réponse: $k = \ldots$

O10a Calculer la superficie comprise entre les graphiques des fonctions
$f(x) = |2x + 1|$ et $g(x) = -|2x| + 2$.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible positive ou d'un nombre entier positif.)

Réponse: Surface = $\ldots$.

Exercice 1

Soients :

- v_1 : le nombre de moineaux en 2022.
- v_2 : le nombre de pigeons ramiers en 2022.
- v_3 : le nombre de merles en 2022.
- v_4 : le nombre de pinsons en 2022.

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1,44 \cdot (4760 + 3840 + 7720 + 6680)$$

$$v_3 = 1,3 \cdot 7720, \quad v_4 = 1,3 \cdot 6680, \quad 2v_2 = v_1$$

$$\Leftrightarrow 3v_2 = 14400$$

$$\Leftrightarrow v_2 = 4800$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{v}_1 = 9600}$$

On aura 9600 moineaux en 2022.

Exercice 2

- $\underline{1^{er} cas}$: $x < 0$

$$-x^2 \geq -4x - 5$$

$$0 \geq (x+1)(x-5)$$

x (<0)		-1		0
(x+1)(x-5)	+	0	-	-

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{x=-1}}$$

- $\underline{2^{e} cas}$: $x \geq 0$

$$-x^2 \geq 4x - 5$$

$$0 \geq (x-1)(x+5)$$

x (≥0)	0		1	
(x-1)(x+5)	-	-	0	+

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{x=}\{0,1\}}$$

On a au total **3** nombres entiers qui sont solutions de $-x^2 \geq |4x| - 5$.

Exercice 3

Un nombre est rationnel lorsqu'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers.

- $(-36)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-36}} \notin \mathbb{Q}$
- $(27)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 9 \in \mathbb{Q}$
- $(25)^{\frac{-3}{2}} = (5^2)^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{125} \in \mathbb{Q}$
- $(12)^{\frac{0}{1}} = 1 \in \mathbb{Q}$
- $(16)^{\frac{4}{3}} = (2^3 \cdot 2)^{\frac{4}{3}} = 2^5 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^5 \cdot \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$
- $(16)^{\frac{5}{4}} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32 \in \mathbb{Q}$
- $(30)^{\frac{3}{4}} = (2 \cdot 5 \cdot 3)^{\frac{3}{4}} \notin \mathbb{Q}$

Donc, on a au total **3** nombres qui ne sont pas des rationnels.

Exercice 4

- $a > 0 \Leftrightarrow f$ est concave vers le haut $\Leftrightarrow$ graphes (C) et (E) incorrectes.
- $c < 0 \Leftrightarrow f$ croise l'axe des y en-dessous de l'axe des x. $\Leftrightarrow$ graphes (A) et (D) incorrectes.
  Une autre manière de montrer que les graphes (A) et (D) sont incorrectes, est de calculer le discriminant. $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow f$ dispose de deux racines distinctes $\Leftrightarrow$ graphes (A) et (D) incorrectes.

$\Rightarrow$ graphe (B) est le seul graphe possible de f.

Exercice 5

On est au-dessus de l'axe des x en $x = a \Leftrightarrow \boxed{\text{f(a)>0}}$.

La pente est décroissante en $x = a \Leftrightarrow \boxed{\text{f'(a)<0}}$.

La variation de la pente dans les alentours de $x = a$ est positive $\Leftrightarrow \boxed{\text{f''(a)>0}}$.

Exercice 6

(A) $\log(3^2) = 2\log(3) \neq (\log(3))^2$

(B) $\log(10^2)\log(2) = 2\log(2) = \log(4)$

(C) $\log(6) = \log(2) + \log(3) \neq \log(2)\log(3)$

(D) $\log(5) \neq \log(2)\log(3)$

$\Rightarrow$ affirmations (A), (C) et (D) sont à biffer.

Exercice 7

$$\frac{1}{4} < \Big(\overbrace{(|\cos x|)^2}^{=(\cos x)^2}\Big) < \frac{3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} & < \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & < \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

x appartient à $[0, 2\pi]$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}, & \text{ou} \quad \frac{5\pi}{3} < x < \frac{11\pi}{6} \\ \frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}, & \text{ou} \quad \frac{7\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} < 2x < \frac{2\pi}{3} & \Rightarrow \text{quadrants 1 et 2} \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{3} < 2x < \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \text{quadrants 3 et 4} \\ \frac{4\pi}{3} < 2x < \frac{5\pi}{3} & \Rightarrow \text{quadrants 3 et 4} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{3} < 2x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \text{quadrants 1 et 2} \end{cases}$

Aucun quadrant n'est à biffer.

Exercice 8

Le cercle est de centre $(-5-k, 3-k)$.
La distance le séparant de l'axe des x est $|3-k| \leq 4$

$$\Leftrightarrow -4 \leq 3-k \leq 4$$
$$\Leftrightarrow -1 \leq k \leq 7$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\text{k=-1}}$$

Exercice 9

$f'(x) = 0 = 4x - 6 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$

Exercice 10

Chercher la plus grande valeur positive de $x < 1$ de:

$$2\sin(\frac{x\pi}{2}) \leq \sqrt{3}$$

revient à déterminer la solution de:

$$2\sin(\frac{x\pi}{2}) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

Exercice 11

P_i est la probabilité que les 3 dés répondent aux chiffres indiqués par le tableau ci-dessous. Les lignes du tableau représentent tous les cas où le nombre du dé n°3 est strictement supérieur à la somme de ceux des dés n°1 et 2.

D_1	D_2	D_3	P_i
1	1	3,4,5,6	$\frac{4}{6^3}$
1	2	4,5,6	$\frac{3}{6^3}$
1	3	5,6	$\frac{2}{6^3}$
1	4	6	$\frac{1}{6^3}$
2	1	4,5,6	$\frac{3}{6^3}$
2	2	5,6	$\frac{2}{6^3}$
2	3	6	$\frac{1}{6^3}$
3	1	5,6	$\frac{2}{6^3}$
3	2	6	$\frac{1}{6^3}$
4	1	6	$\frac{1}{6^3}$

$P_t = \sum P_i = \frac{20}{6^3} = \frac{5}{54}$, où P_t est la somme des probabilités P_i.

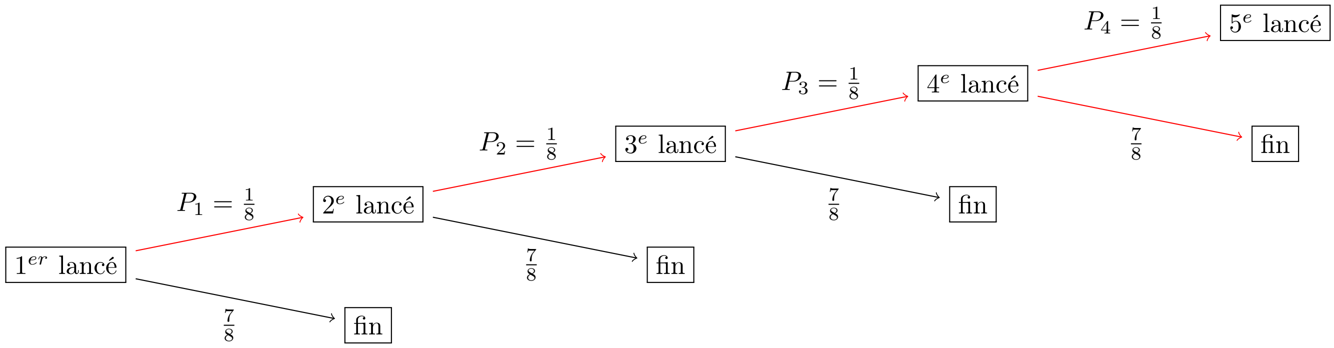
Etant donné que l'ordre des dés n'a pas d'importance, la probabililté est de $\boxed{\mathrm{P}_t = 3 \cdot \frac{5}{54} = \frac{5}{18}}$

Exercice 12

Probabilité d'avoir un nombre inférieur à 4 pour un dé lancé : $\frac{1}{2}$

Probabilité d'avoir un nombre inférieur à 4 pour chaque dé lancé au i^e lancé: $P_i = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

La probabilité de devoir lancer plus de 3 fois est donc:



La propbalité P recherchée est donc :

$$\boxed{P = (\frac{1}{8})^3 \cdot (\frac{1}{8} + \frac{7}{8}) = \frac{1}{512}}$$

Exercice 13

$f(g(2)) = f(2b_2 + 3) = (2b_2 + 3)^2 + 1 = 290$

$\Leftrightarrow 4b_2^2 + 12b_2 + 10 = 290$

$\Leftrightarrow b_2^2 + 3b_2 - 70 = 0$

$\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4.1.(-70) = 289 = 17^2$

$\Leftrightarrow b_2 = \frac{-3-17}{2} = -10$ ou $b_2 = \frac{-3+17}{2} = 7$

$\Leftrightarrow \boxed{\mathrm{b}_2 = -10}$

Exercice 14

$g(x) = f'(x) = -\cos x \cdot (\cos(\frac{x}{2}))^4 + 4\sin x \cdot (\cos(\frac{x}{2}))^3 \cdot \sin(\frac{x}{2}) \cdot \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow g(-\frac{\pi}{2}) = 0 - 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^3(\frac{-\sqrt{2}}{2})$

$\Leftrightarrow \boxed{g(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}}$

Exercice 15

$f'(x) = 6x^2 + 2x + c$

$f'(3) = 0 = 60 + c$

$\Leftrightarrow \boxed{\text{c=-60}}$.

Exercice 16

Déterminons C:

$f(-1) = 2 = -5 - 1 - C + 1 = -5 - C$
$\Leftrightarrow C = -7$.

Le produit de pentes de deux droites perpendiculaires en un point vaut -1.

$f'(x) = 15x^2 - 2x - 7$. En $x = 1$, la pente vaut : $f'(1) = 6$.

$\Leftrightarrow 6a = -1$, (la pente de $y = ax + b$ est a)

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$.

Le point $(1, f(1) = -2)$ appartient à la droite $y = ax + b$.

$\Leftrightarrow \boxed{\text{-2=a+b}}$.

Exercice 17

$-32 = \int_{-k}^{k}(-\frac{6}{k}x^2+3x+k)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{k}(-\frac{6}{k}x^2+k)\mathrm{d}x,$ (les fonctions $3x$ et $-\frac{6}{k}x^2+k$ sont respectivement impaire et paire).

$\Leftrightarrow -32 = 2[-\frac{2}{k}x^3 + kx]_0^k$

$\Leftrightarrow k = \pm 4, \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{k=4}}$

Exercice 18

$2 = \int_0^{2\pi} 2k\cos(kx+\pi)\mathrm{d}x$

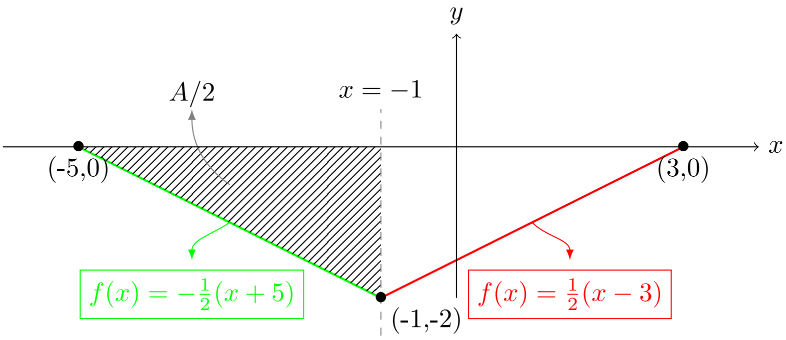
$\Leftrightarrow 1 = [\sin(kx+\pi)]_0^{2\pi}$

$\Leftrightarrow 1 = \sin(2\pi k + \pi)$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 2m\pi = 2\pi k + \pi, \quad m \in \mathrm{Z}$

Pour $m = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{k=-}\frac{1}{4}}$

Exercice 19

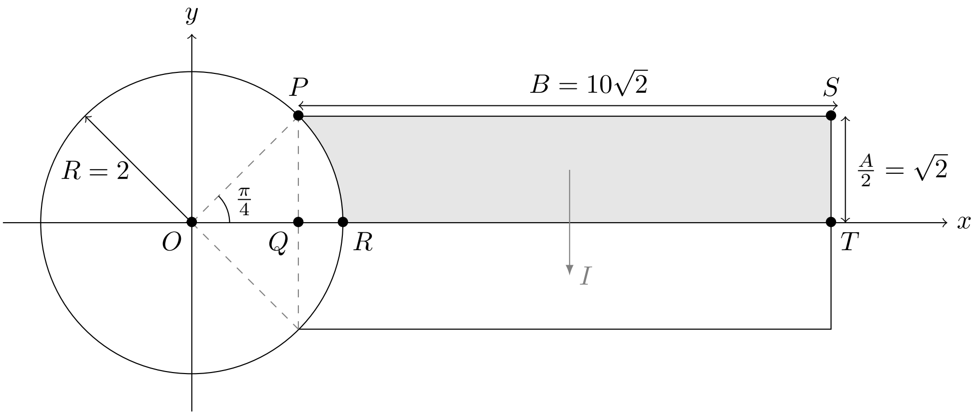


$A = \int_{-5}^{3}(|\frac{1}{2}(x-1)+1|-2)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{3}\frac{1}{2}(x-3)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow A = [\frac{x^2}{2} - 3x]_{-1}^{3} = (\frac{9}{2}-9) - (\frac{1}{2}+3) = -8$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{|A|=8}}$

Exercice 20



- <u>Aire du rectangle $PQTS$</u>

  $PQTS = \frac{AB}{2} = 20$

- <u>Aire du triangle curviligne OPR</u>

  $OPR = \frac{\pi}{8} * R^2 = \frac{\pi}{2}$

- Aire du triangle OPQ

  $OPQ = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1$

- Aire du triangle curviligne PQR

  $PQR = \frac{\pi}{2} - 1$

$\Leftrightarrow I = \frac{AB}{2} - (\frac{\pi}{2} - 1) = 21 - \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow 20I = 20(21 - \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow \boxed{20\mathrm{I} \approx 389\,\mathrm{m}^2}$

Epreuve commune 2022
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série C
20 Questions

- Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
- Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis.
- Les réponses aux questions sont valorisées de la façon suivante:
  - Vous démarrez avec 0 sur 100.
  - Une réponse correcte vous donne 5 points.
  - Une abstention ou une réponse fautive ne modifie pas le résultat.
- Réponses sur la feuille de réponses.

1) Nombre d'oiseaux dans les parcs de votre province en 2021 par espèce:

	2021
Moineaux	4760
Pigeons ramiers	3840
Merles	7720
Pinsons	6680

En 2021, il était prévu que le nombre total d'oiseaux dans ces parcs en 2022 augmente de 44% par rapport à 2021. Pour les pinsons et les merles, on s'attend à une augmentation de 30% en 2022. En 2022, il y aura deux fois moins de pigeons ramiers que de moineaux. Selon cette estimation, combien de moineaux y aura-t-il dans les parcs en 2022 ?

Réponse: ... moineaux

2) Combien d'entiers sont des solutions de $-x^2 \geq |4x| - 5$?

Réponse: ...

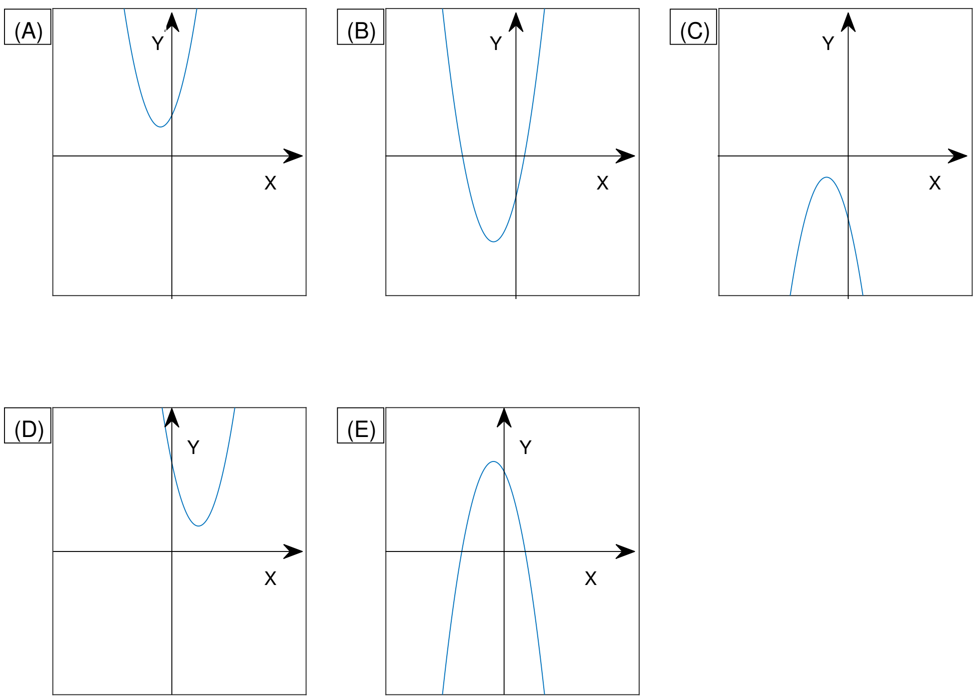
3) Combien de nombres de la liste ci-dessous ne sont pas des nombres rationnels ?

- $(-36)^{\frac{-1}{2}}$
- $27^{\frac{2}{3}}$

- $25^{\frac{-3}{2}}$
- $12^{\frac{0}{1}}$
- $16^{\frac{4}{3}}$
- $16^{\frac{5}{4}}$
- $30^{\frac{3}{4}}$

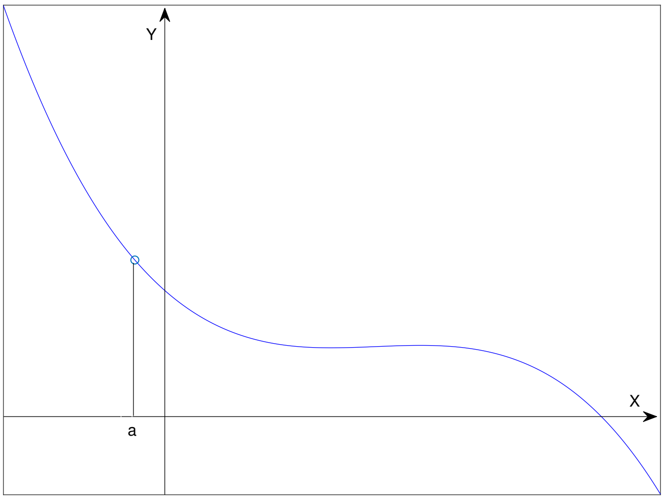
Réponse: ...

4) Laquelle de ces paraboles est le graphe d'une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour laquelle $a > 0, b > 0, c < 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$?



Réponse: ...

5) Considérez le graphique de la fonction $y = f(x)$ dans la figure ci-dessous.



Complétez le tableau ci-dessous par "$>$" ou "$<$".

Réponse:

$f(a)\ \ldots\ 0$
$f'(a)\ \ldots\ 0$
$f''(a)\ \ldots\ 0$

(Ici, f' est la dérivée première de f et f'' est la dérivée seconde de f, c'est-à-dire la dérivée de f'.)

6) Considérez les affirmations suivantes.

A) $\log_{10}\left(3^2\right) = \left(\log_{10}(3)\right)^2$

B) $\log_{10}\left(10^2\right)\log_{10}(2) = \log_{10}(4)$

C) $\log_{10}(6) = \log_{10}(2)\log_{10}(3)$

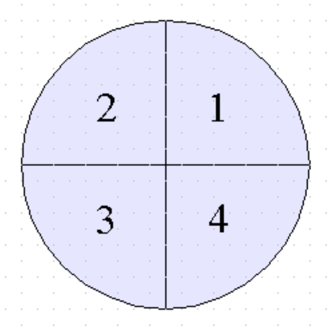
D) $\log_{10}(5) = \log_{10}(2)\log_{10}(3)$

Biffez les affirmations erronées dans le tableau ci-dessous.

Réponse:

A	B	C	D

7) Si $\frac{1}{4} < (|\cos(x)|)^2 < \frac{3}{4}$, biffez les quadrants auxquels $2x$ peut appartenir dans le tableau ci-dessous.



Réponse: | 1 | 2 | 3 | 4 |

8) Considérons l'équation suivante d'un cercle: $(x+5+k)^2+(y-3+k)^2=16$.
Quelle est la plus petite valeur de k telle que le cercle suivant ait un point de tangence ou d'intersection avec l'axe x ?
(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

Réponse: $k = \ldots$

9) Soit $f(x) = 2x^2 - 6x + \frac{5}{2}$.

Donnez la plus grande valeur de x pour laquelle $f(x)$ atteint un extremum (maximum ou minimum).
(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

Réponse: $x = \ldots$

10) Donnez la plus grande valeur strictement positive de x qui est inférieure à 1 et qui satisfait $2\sin\left(\frac{x\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$.
(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

Réponse: $x = \ldots$

11) Vous avez 3 dés avec six faces. Si vous lancez tous les dés, quelle est la probabilité qu'une valeur des dés ait une valeur supérieure à la somme des valeurs des autres dés, sachant que chaque côté a la même probabilité ?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

Réponse: …

12) Vous avez 3 dés avec six faces. Vous jettez tous les dés. Si aucun des dés n'a une valeur supérieure à 3, vous relancez, sinon vous vous arrêtez. Quelle est la probabilité que vous deviez lancer plus de trois fois avant de vous arrêter, sachant que chaque côté a la même probabilité ?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

Réponse: …

13) On donne:

- $a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ c_1 = 1,\ a_2 = 1,\ c_2 = -1,$
- $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1,$
- $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2.$

Quelle est la plus petite valeur de b_2 pour laquelle $f(g(2)) = 290$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne doit plus contenir de racines carrées.)

Réponse: $b_2 = \ldots$

14) On donne:

- $f(x) = -\sin(x)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4$
- g la dérivée de f
- $k = \frac{1}{2}$

Quelle est la valeur de $g\,(-k\pi)$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne doit pas contenir de racines, π, sin, cos, et autres.)

Réponse: ...

15) On donne:

- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- $a = 2, b = 1, d = 1$

Quelle est la plus grande valeur de c pour laquelle le graphique de $f(x)$ a une tangente horizontale en $x = 3$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne doit plus contenir de racines.)

Réponse: $c = \ldots$

16) Si

- $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
- $A = 5, B = -1, D = 1$
- le graphique de $f(x)$ passe par le point $(-1, 2)$
- $y = ax + b$ est l'équation de la droite perpendiculaire à la tangente de $f(x)$ en $x = 1$.

déterminez alors la somme de a et b.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

Réponse: $a + b = \ldots$

17) Si

- $f(x) = \frac{a}{k}x^2 + bx + k$
- $c = \int_{-k}^{k} f(x)\,dx$
- $a = -6, b = 3, c = -32$

déterminez alors la plus grande valeur de k.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

Réponse: $k = \ldots$

18) Si

- $f(x) = a \cdot k \cdot \cos(kx + b)$
- $c = \int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx$
- $a = 2, b = \pi, c = 2$

déterminez alors la plus grande valeur négative de k.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

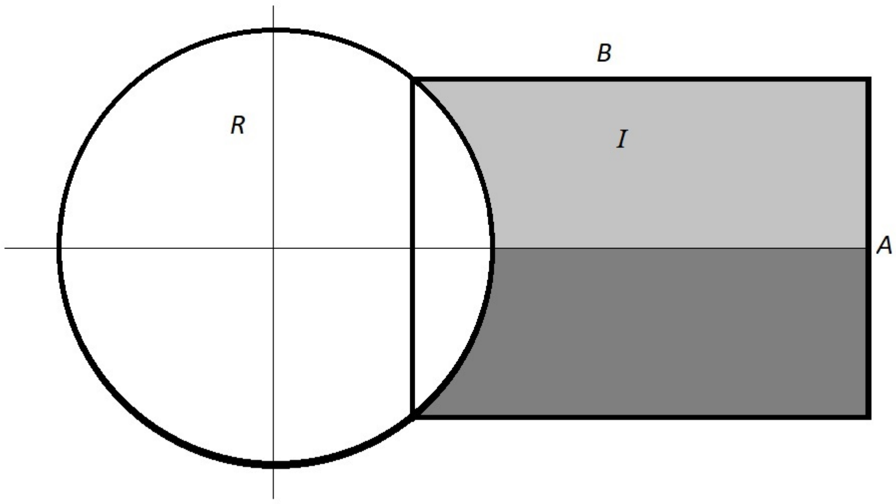
Réponse: $k = \ldots$

19) Soit A l'aire délimitée en bas par le graphique de la fonction $f(x) = |k(x-1)+1|-2$ et délimitée en haut par l'axe x.
Quelle est la valeur (positive) de A quand $k = \frac{1}{2}$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un entier.)

Réponse: $A = \ldots.$

20) La figure ci-dessous représente un cercle de rayon R et un rectangle dont les côtés sont respectivement de longueur A et B. Deux des sommets du rectangle se trouvent sur le cercle.
L'aire de la zone gris clair est identique à la zone gris foncé et est désignée par I.
Si vous savez que $A^2 = 2R^2$, $B = 5A$ et $R = 2$, combien font vingt fois I, arrondis à l'entier le plus proche ?
(Utilisez $\pi = 3,14$ pour vos calculs.)



Réponse: 20 $I=\ \dots$

Epreuve commune de mathématiques Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie 20 questions	2023 Série A

- Les manuels et les calculatrices ne sont pas autorisés.
- Les réponses aux questions seront notées comme suit :
  - Vous commencez avec 0 sur 20.
  - Une réponse correcte vous donnera 1 point.
  - Une abstention ou une mauvaise réponse ne change pas votre résultat.
- Réponses sur la feuille de réponses.
- **Chaque réponse doit être écrite sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible**.

1. Alice et Bob conduisent en ligne droite à vitesse constante d'un point A à un point B.

   Alice part à 12h36 et roule à 60 km/h.

   Bob conduit à 80 km/h.

   Alice et Bob arrivent simultanément au point B.

   Le point B est à 48 km du point A.

   A quelle heure Bob est-il parti ?

   Réponse: ... h ....

2. Quelqu'un a ajouté une plante aquatique à son étang. La surface des feuilles de la plante double chaque jour. Après 20 jours, l'étang est complètement couvert.

   Combien de temps faudrait-il pour recouvrir complètement l'étang si l'on avait pris pas un seul mais quatre plantes (identiques) ?

   Réponse: ... jours

3. On donne: $3\log(9) + 9\log(3) = a\log\left(3^b\right)$

   Le logarithme ci-dessus utilise la base 10.

   On demande: $a \cdot b$

   Réponse: $a \cdot b = \ldots$

4. On demande: la plus petite valeur positive de x (en degrés) pour laquelle $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Réponse: $x = \ldots^\circ$

5. On donne:

- $f(x) = \left(\frac{x-2}{x+5}\right)^2$
- g est la dérivée de f

On demande: $g(-3)$

Réponse: $g(-3) = \ldots$

6. On donne:

   - $f(x) = \frac{4x+5}{x^2}$
   - $y = ax + b$ est l'équation de la normale [1] au graphique de f au point $(-1, f(-1))$

   On demande: Déterminez a et b.

   Réponse: $a = \ldots$, $b = \ldots$

7. Lequel des cinq nombres suivants n'est pas égal aux autres ?

   A) $\left(2^4\right)^8$
   B) $\left(4^2\right)^8$
   C) $2^{16} \cdot 16^2$
   D) $2^{16} \cdot 2^{16}$
   E) $4^8 \cdot 4^8$

   Réponse: $\ldots$

8. Combien vaut le reste de la division polynomiale suivante: $\frac{3x^3+2x^2+x+1}{3x-2}$?

   Réponse: $\ldots$

9. Si $\int_0^3 x^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin(x) dx$, quelle est alors la valeur de a ?

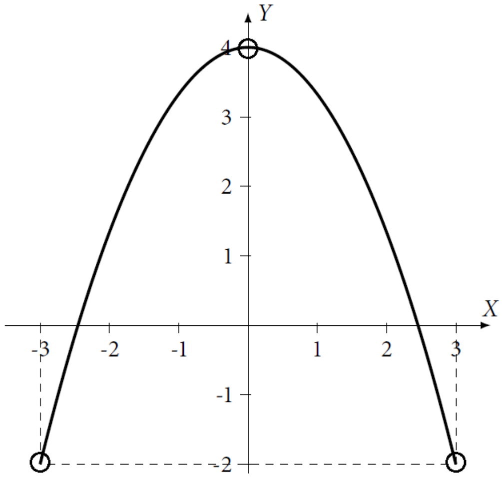
   Réponse: $a = \ldots$

10. Trois ouvriers ont une tâche commune. Le premier prendrait 2 heures à lui seul, le deuxième travaille deux fois moins vite que le premier et le troisième deux fois plus vite que le premier. Combien de temps (exprimé en heures) ont-ils besoin s'ils travaillent ensemble ?

    Réponse: $\ldots$ heures.

11. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ et si le graphique de f est donné par la figure sous-jacente, combien vaut alors $\int_{-2}^3 f(x)dx$?

[1] La normale est la droite perpendiculaire à la tangente.



Réponse: ...

12. Vous avez 12 pièces en votre possession, dont 5 proviennent de Belgique, 3 des Pays-Bas et 4 de France. Toutes les pièces d'un même pays sont considérées comme identiques. Si vous lancez toutes les pièces en même temps et n'en attrapez que trois, quelle est la probabilité d'avoir trois pièces identiques ?
(Chaque pièce individuelle a la même probabilité d'être attrapée.)

Réponse: ...

13. Un tournoi de football se joue entre 10 équipes. Il y a 2 poules[2] de 5 équipes. Dans une poule, chaque équipe joue une fois contre toutes les autres équipes de la même poule. Les vainqueurs de chaque poule jouent la finale. Combien de matchs sont joués au total ?

Réponse: ...

14. Déterminez la valeur positive de A de sorte que $3\sin x + 4\cos x = A\sin(x+\phi)$, avec ϕ la valeur d'un angle (que ne vous devez pas déterminer).

Réponse: $A = \ldots$

15. Calculez l'aire comprise entre la parabole $y^2 = 4x$ et la droite $y = 2x - 4$.

Réponse: ...

16. Divisez le nombre 12 en deux parties positives x et y (i.e. $x + y = 12$) telles que $(x^2 + y^2)$ soit maximal. Calculez $x \cdot y$.

Réponse: $x \cdot y = \ldots$

[2]Lorsqu'il est utilisé dans le domaine sportif, le terme poule est le plus souvent synonyme de groupe.

17. Quelle est la plus petite valeur positive de x pour laquelle
$\sin x \left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) = 2$?

    Convertissez votre réponse en degrés.

    Réponse: $x = \ldots^\circ$

18. Si $f''(x) = 30x^4 + 12x$ et $f'(1) = 12$, combien vaut alors $f(0) - f(-1)$?

    (Ici, f' est la dérivée première de f et f'' est la dérivée seconde de f, c'est-à-dire la dérivée de f'.)

    Réponse: $f(0) - f(-1) = \ldots$

19. On donne: $f(x) = x^3 - 7x^2 - 4x + 28$

    Soient s la somme des racines et p le produit des racines. Combien vaut $\frac{s}{p}$?

    Réponse: $\ldots$

20. On donne: $f(x) = 2x^3 + kx^2 + 36x + 5$

    Déterminez k de sorte que f atteint un extremum pour $x = 2$ et donnez la nature de cet extremum.

    Réponses:
    $k = \ldots$
    Extremum = maximum/minimum (biffer la mauvaise réponse)

Exercice 1

Soients :

- T_0 : l'heure à laquelle Bob a démarré du point A.
- T_1 : l'heure à laquelle Alice et Bob sont arrivés au point B.
- t_A et t_B : La durée de trajet d'Alice et de Bob respectivement.
- v_A et v_B les vitesses d'Alice et Bob respectivement.

Calculons d'abord t_A à partir des données d'Alice.

$$t_A = \frac{d}{v_A} = \frac{48}{60} = 0,8 \text{ h} = 48 \text{ minutes}$$
$$\rightarrow T_1 = 13h24$$

Calculons ensuite t_B à partir des données de Bob.

$$t_B = \frac{d}{v_B} = \frac{48}{80} = 0,6 \text{ h} = 36 \text{ minutes}$$
$$\rightarrow T_0 = 12h48$$

Exercice 2

Si la plante met 20 jours pour couvrir l'étang, elle mettrait 19 et 18 jours respectivement pour couvrir la moitié et le quart de cet étang. Si on passe à 4 plantes au départ, après 18 jours, chaque plante couvrira le quart de l'étang. Etant donné qu'elles sont 4, après 18 jours, l'étang sera couvert complètement.

Exercice 3

$$2.3 \log 3 + 9 \log 3 = ab \log 3$$
$$ab = 15$$

Exercice 4

$$\sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$
$$\rightarrow x = 75°$$

Exercice 5

$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+5}\right)^2$
$g(x) = f'(x) = 2.\frac{x-2}{x+5}.\left(\frac{x+5-(x-2)}{(x+5)^2}\right) = 14\frac{x-2}{(x+5)^3}.$
$\rightarrow g(-3) = -\frac{35}{4}$

Exercice 6

On sait que le produit du coefficient angulaire de la tangente en $f(-1)$ et a vaut -1.
$f'(-1) = \frac{4x^2-(4x+5).2x}{x^4} = 6 \rightarrow a = -\frac{1}{6}$.
Or, la droite normale passe par le point $(-1, f(-1))$.
$f(-1) = 1 \rightarrow 1 = -a + b \rightarrow b = \frac{5}{6}$.

Exercice 7

$A) = B) = D) = E) = 2^{32}$, $C) = 2^{24}$

Exercice 8

$$3x^3 + 2x^2 + x + 1 = (3x-2)(x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{11}{9}) + \overbrace{\frac{31}{9}}^{=\textbf{Reste}}$$

Exercice 9

$$\int_0^3 x^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin(x)dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = a\left[\cos(x)\right]_{\pi/2}^0$$

$$\rightarrow a = 9$$

Exercice 10

Soient:

- W la tâche à réaliser.
- v_1, v_2, v_3, la vitesse du premier, deuxième et troisième ouvrier respectivement.
- t le temps de travail lorsque les 3 ouvriers travaillent ensemble.

On sait : $v_1 = \frac{W}{2}$, $v_2 = \frac{v_1}{2}$, $v_3 = 2v_1$.
Lorsque les 3 ouvriers travaillent ensemble, on additionne leur vitesse de travail:

$$v_1 + v_2 + v_3 = \frac{7}{2}v_1 = \frac{W}{t}$$

$$t = \frac{2}{7}.\frac{W}{v_1} = \frac{4}{7}\text{ h}$$

Exercice 11

Du graphe de la fonction f, on en déduit:

- $f(0) = 4 = c$
- $f'(0) = 0 = 2ax + b \rightarrow b = 0$
- $f(3) = -2 = 9a + 4 \rightarrow a = -\frac{2}{3}$

$\int_{-2}^{3}\left(-\frac{2}{3}x^2 + 4\right)dx = \left[-\frac{2}{9}x^3 + 4x\right]_{-2}^{3} = ... = \frac{110}{9}$

Exercice 12

Calculons la probabilité P_B d'obtenir 3 pièces belges. Pour la 1^{ere} pièce attrapée, on a une probabilité de $\frac{5}{12}$ d'en avoir une belge. Pour la 2^{eme} pièce, on a une probabilité de $\frac{4}{11}$ d'en avoir une belge. Et enfin pour la dernière pièce, on a logiquement une probabilité de $\frac{3}{10}$ d'en avoir une belge.
La probabilité P_B d'obtenir un tel scénario est donc : $P_B = \frac{5}{12}.\frac{4}{11}.\frac{3}{10}$

Pour les 2 autres pays, on obtient en suivant le même raisonnement:

- $P_{PB} = \frac{3}{12}.\frac{2}{11}.\frac{1}{10}$, pour les pièces des Pays-Bas
- $P_F = \frac{4}{12}.\frac{3}{11}.\frac{2}{10}$, pour les pièces de la France.

En sommant ces 3 cas, on répond à la question : $P_B + P_{PB} + P_F = \frac{3}{44}$

Exercice 13

Appelons les 5 équipes dans la première poule A, B, C, D et E. A joue 4 fois. B joue 4 fois aussi mais sa confrontation contre A a déjà été comptabilisé dans le nombre de matchs disputés par A. De ce fait, on n'en ajoute que 3. Pour C, on ajoute 2, pour D 1 et pour E 0 car tout a déjà été comptabilisé dans les confrontations des équipes précédentes. Au final, on obtient donc $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ matchs dans la première poule. Puisqu'il y a deux poules, on obtient 20 match. La finale fait qu'on obtient 21 en tout.

Exercice 14

$$3\sin(x) + 4\cos(x) = A\sin(x+\phi)$$

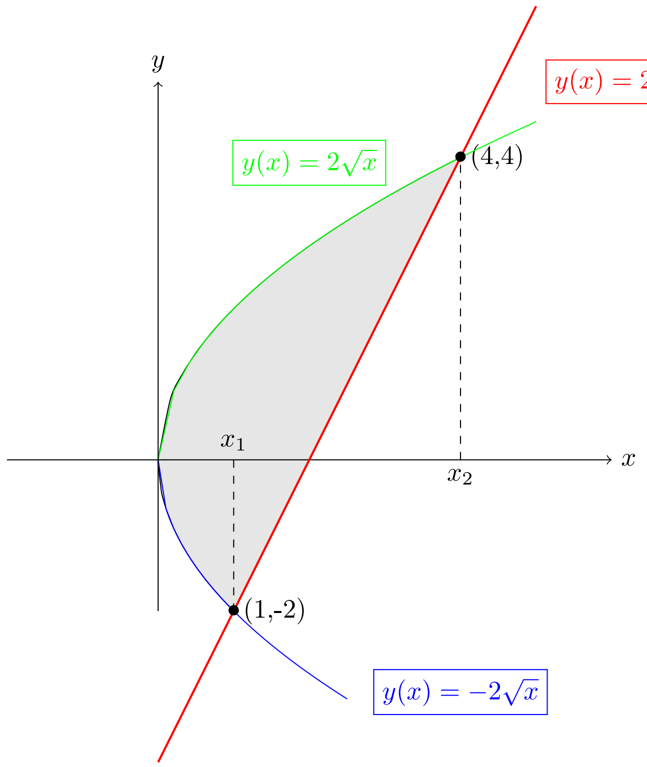
$$3\sin(x) + 4\cos(x) = A\sin(x)\cos(\phi) + A\cos(x)\sin(\phi)$$

Par identification:

$\begin{cases} 3 = A\cos(\phi)\ (1) \\ 4 = A\sin(\phi)\ (2) \end{cases}$

$(1)^2 + (2)^2 : 25 = A^2 \rightarrow A = 5$, puisque $A > 0$.

Exercice 15



Les points d'intersection entre les 2 courbes se calculent comme suit:

$$2x - 4 = 2\sqrt{x}$$

$$\rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4$$

Pour calculer l'aire entre les 2 courbes (zone grisée), on peut travailler avec les fonctions réciproques : $y = 2x - 4$ devient $x = \frac{y+4}{2}$ et $y^2 = 4x$ devient $x = \frac{y^2}{4}$. L'aire se calcule comme suit:

$$\int_{-2}^{4} \left(\frac{y+4}{2} - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{4} \left(2(y+4) - y^2\right) dy$$

$$\frac{1}{4}\left[y^2 + 8y - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{4} = 9$$

Bien entendu, le résultat peut aussi s'obtenir comme suit:

$$2\int_{0}^{x_1} 2\sqrt{x}dx + \int_{x_1}^{x_2} (2\sqrt{x} - (2x-4))dx$$

Exercice 16

x	y	x^2+y^2
0	12	144
1	11	122
2	10	104
3	9	90
4	8	80
5	7	74
6	6	72
7	5	74
8	4	80
9	3	90
10	2	104
11	1	122
12	0	144

Les couples $(0,12)$ et $(12,0)$ maximisent $x^2+y^2 \rightarrow xy = 0$.

Exercice 17

$$\sin(x)(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}) = 2,\ x \neq 0 + k\pi$$

$$\sin(x)\left(\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}\right) = 2$$

$$\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin(x)(1-2\cos(x)) = 0$$

$$\cancel{\rightarrow\ x = 0 + k\pi} \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\rightarrow\ x = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

Exercice 18

Pour trouver $f(x)$, il faudra intégrer $f''(x)$ 2 fois.

$$\int f''(x)dx = f'(x) = 6x^5 + 6x^2 + c$$

$$\rightarrow f'(1) = 12 = 12 + c\ \ \rightarrow c = 0$$

$$\int f'(x)dx = f(x) = x^6 + 2x^3 + d$$

$$\rightarrow f(0) - f(-1) = 1$$

Exercice 19

On remarque que $x = 2$ est racine du polynôme $\rightarrow\ x_1 = 2$.

$$x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = (x-2)(x^2 - 5x - 14)$$

Calculons le discriminant pour calculer les racines éventuelles du facteur quadratique.

$$\Delta = 25 + 4.14 = 81 = 9^2$$

$$\rightarrow\ x_2 = -2,\ x_3 = 7$$

$$\rightarrow s = 7,\ p = -28$$

$$\rightarrow \frac{s}{p} = -\frac{1}{4}$$

Exercice 20

$$f(x) = 2x^3 + kx^2 + 36x + 5$$

Pour que f ait un extrêmum en un point, sa dérivée première $f'(x)$ doit être nulle en ce point.

$$f'(2) = 0 = 6x^2 + 2kx + 36 = 60 + 4k$$

$$\rightarrow\ k = -15$$

Pour déterminer la nature de l'extrêmum, il faut étudier le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ en ce point.

$$f''(x = 2) = 12x - 30 = -6$$

$\rightarrow f$ présente donc un maximum en $x = 2$.