Prüfung POL

2018 — Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen — Reihe B

5 Fragen - 4 Stunden

1. Die mit bestimmten Fragen verbundenen Figuren sind illustrativ und nicht maßstabsgerecht. Es ist sinnlos, sie zu messen.
2. Lehrbücher und Taschenrechner sind nicht erlaubt.
3. Lassen Sie in Ihren Antworten Zahlen wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \dots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ in ihrer symbolischen Form.

Frage 1 (4 Punkte) Gegeben die komplexen Zahl $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie den Betrag $a-1$.

(b) (1 Punkt) Wir setzen $z_0 = 1, \forall n \in \mathbb{R}_0 : , z_n = a^n$ und $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Zeigen Sie, dass die (u_n)-Folge eine geometrische Folge ist, und przisieren Sie denen ersten Begriff u_1 und die Differenz.

(c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Summe $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie, falls verfügbar, den s_n Grenzwert, wenn $n \to +\infty$.

Frage 2 (4 Punkte) Gegeben:

$$b : \frac{x-4a-1}{a} = \frac{y-2a-2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

(a) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass sich c und c kreuzen.

(b) (1 Punkt) Finden Sie eine kartesische Gleichung der Ebene α, die b enthält und parallel zu d ist.

(c) (1 Punkt) Finden Sie eine kartesische Gleichung der Ebene β, die c enthält und parallel zu d ist.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich Flächen α une β immer ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) schneiden und dass die Schnittlinie durch einen Fixpunkt verläuft. Welcher ist dieser Punkt?

Frage 3 (4 Punkte) Die Krümmung einer Funktion ist wie folgt definiert:

$$\left| \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \tag{1}$$

(a) (1 Punkt) Berechnung der Krümmung der Funktion $f(x) = \ln x$.

(b) (2 Punkte) Berechnung der Ableitung der Krümmung von f.

(c) (1 Punkt) Für welche x-Werte ist die maximale f-Krümmung? Wenn kein Maximum vorhanden ist, berechnen Sie die Grenzwerte der Krümmung der Domänengrenzen.

Frage 4 (4 Punkte) Gegeben:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^1\,\mathrm{d}x$

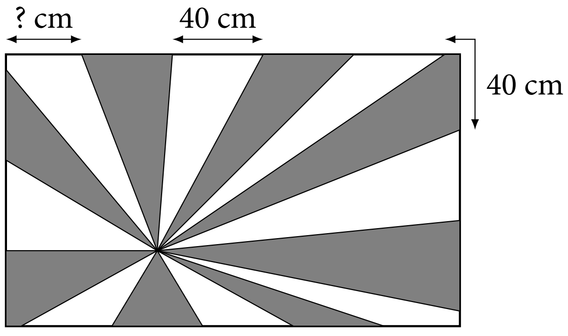
(b) (1 Punkt) Berechnen Sie: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\,\mathrm{d}x$

(c) (2 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$

Frage 5 (4 Punkte) Die Flagge von Fort En Maths ist ein Rechteck von 2 Metern (horizontal) und 1,2 Metern (vertikal). Von jedem Punkt innerhalb des Rechtecks wird die Kontur des Rechtecks alle 40 Zentimeter verbunden.

Die so gebildeten Dreiecke und Vierecke sind abwechselnd weiß und grau gefärbt. Die Summe der Grauflächen übersteigt die Summe der weißen Flächen: Die Differenz beträgt genau ein Hundertstel der Fläche des Rechtecks.

Von links oben nach rechts, wie weit geht es bis zum ersten Farbwechsel (von weiß nach grau), in Zentimetern?



Prüfung POL

2019 Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen Reihe B

5 Fragen - 4 Stunden

1. Die mit bestimmten Fragen verbundenen Figuren sind illustrativ und nicht maßstabsgerecht. Es ist sinnlos, sie zu messen.
2. Lehrbücher und Taschenrechner sind nicht erlaubt.
3. Lassen Sie in Ihren Antworten Zahlen wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \dots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ in ihrer symbolischen Form.

Frage 1 (4 Punkte) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie I_0

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie I_1

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$ Sie $(3+2n)\,I_n = 2nI_{n-1}$ haben.

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie I_5

Frage 2 (4 Punkte) Gegeben: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie den f Grenzwert für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

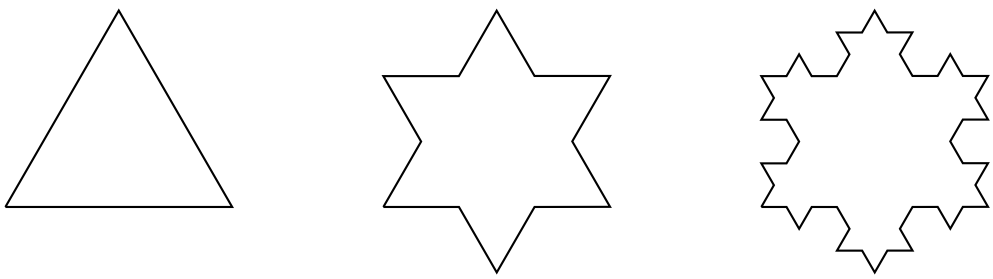
(b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung von f und beweisen Sie die folgende Beziehung zwischen f und f':

$$f'(x) = f(x)\big(1 - f(x)\big)$$

(c) (1 Punkt) Gegeben $g(x) = 2f(x) - 1$. Bestimmen Sie die Beziehung zwischen g und g'.

Frage 3 (4 Punkte) Die Koch-Schneeflocke kann konstruiert werden, indem man mit einem gleichseitigen Dreieck beginnt und dann jede Seite rekursiv wie folgt einstellt:

1. Teilen Sie das Segment in drei gleich lange Segmente auf
2. Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck basierend auf dem mittleren Segment von Schritt 1.
3. Entfernen Sie das Liniensegment, das die Basis des Dreiecks ist, aus Schritt 2.



1e Iteration 2e Iteration

Die Fläche des ursprünglichen Dreiecks ist gleich 1.

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Oberfläche der Koch-Schneeflocke nach 1 Iterationsschritt.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Oberfläche der Koch-Schneeflocke nach 2 Iterationsschritten.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Oberfläche der Koch-Schneeflocke nach n Iterationsschritten.

(d) (1 Punkt) Was ist die Begrenzung der Oberfläche der Koch-Schneeflocke nach $n \to +\infty$ Iterationsschritten?

Frage 4 (4 Punkte) Eine Tastatur hat 42 Tasten, von denen 26 die 26 Buchstaben des Alphabets darstellen, die anderen Zahlen oder Symbole.

(a) (1 Punkt) Arnaud, der 3 Jahre alt ist, drücht zufällig auf eine Taste der Tastatur, wobei jede Taste die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, getroffen zu werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Charakter von seinem Vornamen trifft?

(b) Arnaud schlägt auf 6 Tasten hintereinander, verschieden oder nicht, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

i. (1 Punkt) Arnaud trifft einen Buchstaben zweimal und vier andere verschiedene Buchstaben;

ii. (1 Punkt) Arnaud trifft seinen Vornamen;

iii. (1 Punkt) Arnaud tippte seinen Vornamen, da er wusste, dass er einen Buchstaben zweimal und vier andere verschiedene Buchstaben tippte.

Frage 5 (4 Punkte) Gegeben: $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 3)$ und

$$e : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die geometrische Lage aller Punkte C, so dass der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des $\triangle ABC$ innerhalb von e liegt. (Antwort: ein Kreis mit Mittelpunkt $(1, 1, 1, 1)$ und Radius $\sqrt{5}$, in der $\alpha : x - 2y - z + 2 = 0$ Ebene.)

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den S-Punkt dieses geometrischen Ortes, der sich in $\beta : 2x + y + 2 = 0$ befindet.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Fläche des ABS-Dreiecks.

(d) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\tan \widehat{ASB}$.

Prüfung POL

2020 Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen Reihe A

5 Fragen - 4 Stunden

1. Die mit bestimmten Fragen verbundenen Figuren sind illustrativ und nicht maßstabsgerecht. Es ist sinnlos, sie zu messen.
2. Lehrbücher und Taschenrechner sind nicht erlaubt.
3. Lassen Sie in Ihren Antworten Zahlen wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3$, $\ldots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\ldots$ in ihrer symbolischen Form.

Frage 1 (4 Punkte)

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$, so dass wir für jede komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ mit $b = -2a$ haben:

$$|z - k + 7\mathrm{i}| = |z - 2 + 9\mathrm{i}|$$

(b) (2 Punkte) $-\mathrm{i}$ ist eine Wurzel aus $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Finde die anderen Wurzeln.

Frage 2 (4 Punkte) Ein Patient nimmt 10 mg eines Medikaments am ersten Tag und dann jeden Tag 5 mg. Tagsüber werden 40% der Medikamente im Körper abgebaut. Wir können die Mengen an Medikamenten, die sich unmittelbar nach der Einnahme des ersten, zweiten, dritten, ... Tages im Körper befinden, durch eine Reihe darstellen $u_1, u_2, u_3, \ldots$.

(a) (1 Punkt) Geben Sie eine rekursive Formel für diese Folge ein.

(b) (1 Punkt) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass diese Folge nach oben begrenzt ist.

(c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die Folge steigt.

(d) (1 Punkt) Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge mit Hilfe der Rechenregeln des Grenzwertes.

Frage 3 (4 Punkte) Gegeben: $f(x) = x^3 + px - 1$.

(a) (2 Punkte) Welche Bedingung muss $p \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion kein Extremum hat?

(b) (2 Punkte) Welche Bedingung muss $p \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit die Funktion ein Maximum und ein Minimum und drei verschiedene Nullpunkte hat? (Hinweis: was ist das Vorzeichen des Produkts der Funktionswerte im Maximum und Minimum, wenn es drei verschiedene Nullpunkte gibt?)

Frage 4 (4 Punkte)

(a) (1 Punkt) Demonstrieren Sie, dass für jede reelle Zahl x, wir die folgende Beziehung haben

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

(b) (1 Punkt) Leiten Sie eine Stammfunktion von der f-Funktion auf $\mathbb{R}$ ab, so dass

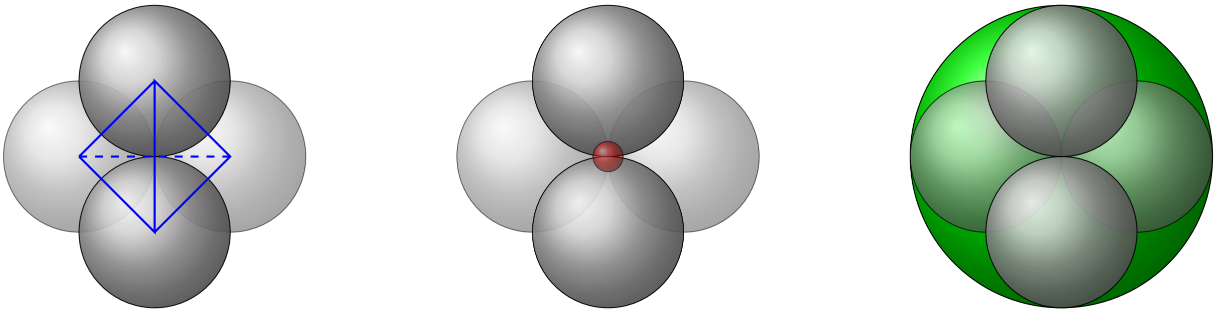
$$f(x) = \cos^3 x$$

(c) (1 Punkt) a ist eine gegebene reelle Zahl ungleich Null, leiten Sie den Wert des Integrals

$$I(a) = \int_0^a (2x+1)\cos^2 x \sin x \, dx$$

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie $I\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Frage 5 (4 Punkte) 4 Kugeln gleichen Radius r sind so gestapelt, dass die Mittelpunkte mit den Scheitelpunkten eines gleichseitigen Tetraeders mit Rippe $2r$ übereinstimmen. Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumen der kleinsten Kugel und der größten Kugel, die die 4 anderen Kugeln berühren.



(a) (1 Punkt) Berechnen Sie in dem Dreieck, das durch die Mittelpunkte der 3 unteren Kugeln gebildet wird, den Abstand vom Schwerpunkt zu einem Scheitelpunkt.

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie in dem Tetraeder, der durch die Mittelpunkte der 4 Kugeln gebildet wird, den Abstand vom Schwerpunkt (d.h. der Punkt, der gleich weit von den 4 Scheitelpunkten) zu einem Scheitelpunkt unter Verwendung vorigen Ergebnisses.

(c) (1 Punkt) Berechnen Sie das Volumen der größten Kugel (Zentrum in der vorigen Frage angegeben).

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie das Volumen der kleinsten Kugel (gleiches Zentrum) und berechnen Sie das Verhältnis beider Volumina.

1. Die Abbildungen bei bestimmten Fragen sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Antworten unverändert stehen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie das Polynom $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + 1$.

(a) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass $P'(1/2) < 4$.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst $(x-1)P(x)$.

(b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$2^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{4}} \times \ldots \times (2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4.$$

Hinweis: Sie dürfen die Logarithmusfunktion verwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit allgemeinem Glied $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie die ersten drei Folgenglieder und beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt.$$

(b) (1 Punkt) Beweisen Sie durch partielle Integration, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}.$$

(c) (2 Punkte) Beweisen Sie durch Induktion, dass für alle $p \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{g(p)}{h(p)}$$

wobei $g(p) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1)$ und $h(p) = \prod_{k=1}^{p} 2k$.

Erinnerung: $\Pi_{k=1}^{N} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) (1 Punkt) Betrachten Sie in $\mathbb{C}$ folgende Gleichung: $|1+iz| = |1-iz|$, wobei $i^2 = -1$. Beweisen Sie, dass die Lösungen der Gleichung reell sind.

(b) (1 Punkt) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Betrachten Sie in $\mathbb{C}$ die folgende Gleichung mit der Unbekannten z

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}. \qquad (\ddagger)$$

Beweisen Sie ohne Berechnung, dass die Lösungen der Gleichung reell sind.

Hinweis: (a) kann Ihnen helfen, indem Sie zunächst den Modulus (Betrag) einer komplexen Zahl berechnen.

(c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die Gleichung ($\ddagger$) in der Form $\operatorname{cis}(2n\theta) = \operatorname{cis}(2\alpha)$ geschrieben werden kann, für ein bestimmtes $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Erinnerung: $\operatorname{cis}(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Hinweis: aufgrund von (b) können Sie davon ausgehen, dass $z = \tan\theta$, mit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, und ähnlich für a.

(d) (1 Punkt) Wie viele Lösungen hat die Gleichung ($\ddagger$)? Bestimmen Sie diese Lösungen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

$\lambda = \{AB, M\}$ ist das Verhältnis, nach dem der Punkt M den Vektor $\overrightarrow{AB}$ teilt, das heißt

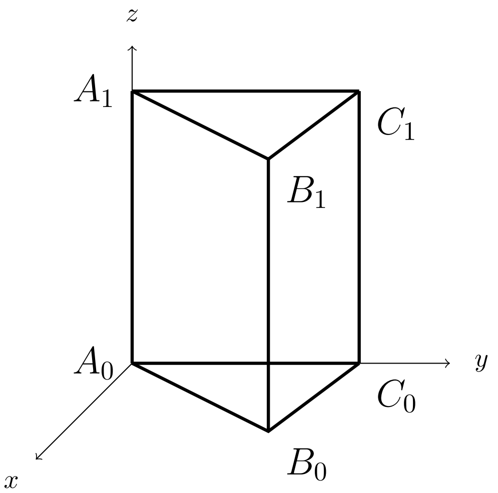
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}.$$

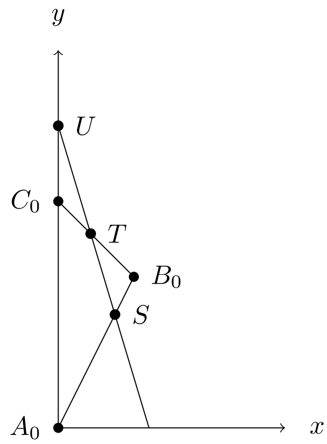
In einem orthonormalen Achsensystem ist durch die Punkte $A_0(0,0,0)$, $C_0(0,3,0)$, $B_1(1,2,5)$ ein gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche gegeben (siehe Abbildung links).
Auf der Diagonalen A_0B_1 ist ein Punkt P so festgelegt, dass $\{A_0B_1, P\} = \frac{5}{4}$.
Π ist die Ebene, die durch P geht und zu den Diagonalen A_1C_0 und B_0C_1 parallel is. Die Ebene Π schneidet die Linie C_0C_1 im Punkt R.

(**a**) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass die kartesische Gleichung der Ebene Π $20x + 5y + 3z = 25$ ist.

(**b**) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Verhältnis $\{C_0C_1, R\}$.

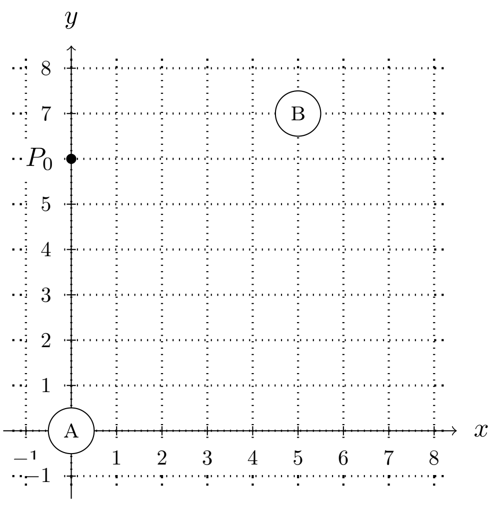
(**c**) (2 Punkte) Betrachten Sie das Dreieck $A_0B_0C_0$. Wir wählen drei kollineare Punkte S, T, U, so dass $\lambda_1 = \{A_0B_0, S\}$, $\lambda_2 = \{B_0C_0, T\}$, $\lambda_3 = \{C_0A_0, U\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_0$, wie unten gezeigt wird (rechts). Das Produkt $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ ist konstant. Bestimmen Sie die Werte dieser Konstanten.





Aufgabe 5 (4 Punkte)

Alice (A) und Bob (B) bewegen sich in der Koordinatenebene fort. Die Länge ihrer Schritte ist immer 1. Sie machen jeden Schritt gleichzeitig.
Alice beginnt bei $(0,0)$ und macht jeden Schritt zufällig nach rechts oder oben; die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Schritt nach rechts macht, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass sie einen Schritt nach oben macht.
Gleichzeitig beginnt Bob bei $(5,7)$ und macht jeden Schritt zufällig nach links oder unten; die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Schritt nach links macht, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass er einen Schritt nach unten macht.



(**a**) (1 Punkt) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Alice und Bob im Punkt $P_0(0,6)$ treffen?

(**b**) (1 Puntk) Bestimmen Sie die weiteren Punkte $(P_1, P_2, \ldots)$, in denen sich Alice und Bob treffen können.

(**c**) (2 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich Alice und Bob überhaupt treffen?

Königliche Militärakademie - Zusätzliche Prüfung POL

2023 Analysis - Goniometrie - Geometrie **Reihe A Teil 1**

4 Aufgaben - Arbeitszeit 3 Stunden

1. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	5	5	5	5	20

Aufgabe 1 .... **5 Punkte**

Die Funktion g hat als Vorschrift

$$g(x) = \int_{-1}^{1} f(u)|x-u|du,$$

wobei $x \in]-1,1[$ liegt und f eine stetige Funktion ist, für die gilt: $f(0) = 1$. (Anmerkung: $|x-u|$ ist der Absolutwert von $x-u$.)

(a) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass

$$g'(x) = \int_{-1}^{x} f(u)du - \int_{x}^{1} f(u)du.$$

Anmerkung: $g'(x)$ ist die Ableitung von $g(x)$.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die zweite Ableitung der Funktion g an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 2 .... **5 Punkte**

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$. Beginnen Sie mit der Variablensubstitution $x = \pi - y$.

Aufgabe 3 .... **5 Punkte**

Gegeben: die Funktion

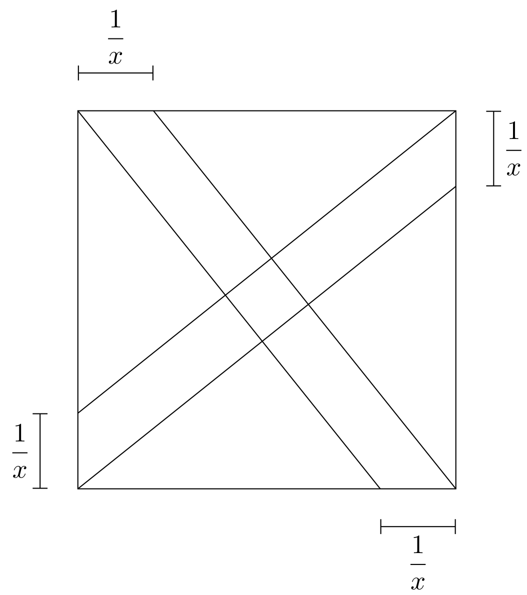
$$f(x) = \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right), \quad \forall x \in \left[-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}\right].$$

(a) (3 Punkte) Wenn $g(x) = -x - \dfrac{\pi}{6}$ und $h(x) = \dfrac{2}{\sin 2x} + \cos x$, beweisen Sie, dass $f(x) = h(g(x))$.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie mithilfe des vorigen Punktes den größ ten Wert, den f auf dem gegebenen Definitionsbereich annimmt.

Aufgabe 4 .... **5 Punkte**

Innerhalb eines Quadrats mit Fläche 1 zeichnen wir ein kleineres Quadrat, indem wir jeden Eckpunkt mit einem Punkt im Quadrat verbinden, der sich in einem Abstand von $\frac{1}{x}$ vom gegenüberliegenden Eckpunkt befindet (siehe Abbildung).



Bestimmen Sie den Wert von x, wenn das kleine Quadrat im Inneren eine Fläche von $\frac{1}{221}$ hat.

2023 | **Königliche Militärakademie - Zusätzliche Prüfung POL** | **Reihe A Teil 2**

Algebra - Analytische Geometrie - Wahrscheinlichkeitsrechnung

4 Aufgaben - Arbeitszeit 3 Stunden

1. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	5	5	5	5	20

Aufgabe 1 .... 5 Punkte

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ vierten Grades, bei dem der Koeffizient des konstanten Terms 0 ist und das die Gleichung $p(x) - p(x-1) = x^3$ erfüllt.

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Summe $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 100^3$. Verwenden Sie dabei Teilaufgabe (a).

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Summe

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \ldots + 199^2.$$

Hinweis: Sie können das Verfahren der Teilaufgaben (a) und (b) wiederholen. Der erste Schritt besteht darin, ein geeignetes Polynom dritten Grades zu bestimmen.

Aufgabe 2 .... 5 Punkte

Bestimmen Sie alle ganzen Werte von α im Intervall $[0°, 90°]$, so dass $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{20}$ eine reelle Zahl ist.

Aufgabe 3 .... 5 Punkte

Die Gerade mit der Gleichung $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ schneidet den Kreis mit der Gleichung $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$ in den Punkten A und B.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in [0, 2\pi]$ den Abstand zwischen der Geraden AB und dem Punkt $P(3\cos\alpha, 3\sin\alpha)$.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Punkte P auf dem Kreis, für die die Fläche des Dreiecks PAB maximal ist.

Aufgabe 4 .... 5 Punkte

An einem internationalen Fechtturnier nach K.-o.-System nehmen 64 Teilnehmer teil, von denen 8 Vertreter der Königlichen Militärakademie (KMA). Die Tabelle mit den Kämpfen der ersten Runde wird rein zufällig ausgefüllt.

(a) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass es 105 Möglichkeiten gibt, 8 Personen in 4 Gruppen mit je 2 Personen aufzuteilen, wenn die Reihenfolge der Gruppen und die Reihenfolge innerhalb der Gruppen keine Rolle spielen.

(b) (2 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in der ersten Runde nicht zu einem Kampf zwischen zwei Vertretern der KMA kommt?

(c) (2 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Vertreter der KMA nicht vor dem Viertelfinale aufeinandertreffen?

Königliche Militärakademie - Zusätzliche Prüfung POL

2023 Analysis - Goniometrie - Geometrie **Reihe C Teil 1**

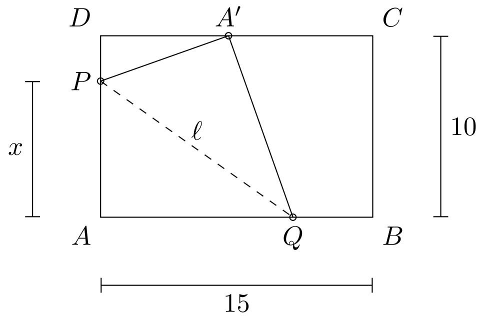
4 Aufgaben - Arbeitszeit 3 Stunden

1. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	5	5	5	5	20

Aufgabe 1 .... 5 Punkte

Ein rechteckiges Blatt Papier $ABCD$ ist 15 cm lang und 10 cm breit. Es wird so gefaltet, dass der Eckpunkt A zu einem Punkt A' auf der langen Seite $[CD]$ gebracht wird. Die Länge des Liniensegments $[AP]$ wird mit x bezeichnet, die Länge der Falte $[PQ]$ mit ℓ (gepunktet auf der Abbildung).



(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\ell^2 = \dfrac{x^3}{x-5}$.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert für ℓ.

Aufgabe 2 .... 5 Punkte

Für alle $x > 0$ ist die Funktion f gegeben durch

$$f(x) = \int_1^x \frac{\ln u}{u+1}\,du.$$

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln^2(x)$.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie $f(e^{-5}) + f(e^{-4}) + f(e^{-3}) + \ldots + f(e^4) + f(e^5)$.

Aufgabe 3 .... 5 Punkte

Lösen Sie in $[0, \pi]$:

$$\frac{\cos(3x)}{2\cos(x)-1} > \frac{\cos(4x)}{2\cos(2x)+1}.$$

Aufgabe 4 .... 5 Punkte

Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Seite $[BC]$ des Dreiecks ABC, für das gilt: $|AB| = |AM|$.

(a) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass $\tan \hat{B} = 3 \tan \hat{C}$.

(b) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass $\sin \hat{A} = 2 \sin \left(\hat{B} - \hat{C} \right)$.

1. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	4	5	6	5	20

Aufgabe 1 .... 4 Punkte

k ist die einzige reelle Zahl, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

$$0 < k < 1 \qquad \text{und} \qquad k^3 + k = 1.$$

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie k^4 in Form eines quadratischen Ausdrucks, d.h. eines Ausdrucks der Form ak^2+bk+c, wobei a, b, c zu bestimmende, reelle Koeffizienten sind. Bei dieser und den folgenden Teilaufgaben dürfen Sie davon ausgehen, dass der quadratische Ausdruck eindeutig ist.

(b) (1 Punkt) Schreiben Sie $\frac{1}{k}$ als quadratischen Ausdruck.

(c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass $\frac{1}{1+k}$ dem quadratischen Ausdruck $\frac{1}{3}(k^2 - k + 2)$ gleich ist.

(d) (1 Punkt) Schreiben Sie das unendliche Produkt

$$(1-k)(1+k^2)(1+k^4)(1+k^8)(1+k^{16})\ldots$$

in Form eines quadratischen Ausdrucks. Hinweis: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ wenn $|x| < 1$.

Aufgabe 2 .... 5 Punkte

Zeichnen Sie in der komplexen Fläche exakt das Gebiet, das aus den Punkten z besteht, so dass

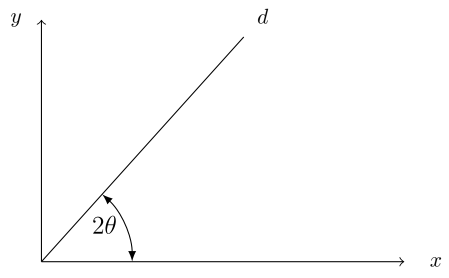
$$\frac{z}{10} \quad \text{und} \quad \frac{10}{\bar{z}}$$

ihren Real- und Imaginärteil zwischen 0 und 1 haben. $\bar{z}$ steht für die konjugiert komplexe Zahl zu z.

Aufgabe 3 .... 6 Punkte

Gegeben: ein orthonormales Achsensystem und eine Gerade d, die mit der x-Achse einen Winkel 2θ (zwischen 0 und $\pi/2$) bildet und durch den Ursprung geht (siehe Abbildung).

Der Kreis C_1 hat den Radius 1 und der Kreis C_2 hat den Radius 3. Beide Kreise liegen zwischen der Geraden d und der x-Achse. Die Kreise berühren die beiden Geraden tangential.



(a) (2 Punkte) Geben Sie die kartesische Gleichung des Kreises C_1 in Abhängigkeit von θ an.

(b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass sich die Kreise C_1 und C_2 in genau einem Punkt berühren, wenn $\theta = \frac{\pi}{6}$.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie für diesen Wert von θ den Inhalt der Fläche des Gebiets, das durch die x-Achse, C_1 und C_2 begrenzt ist.

Aufgabe 4 .... 5 Punkte

Ein Lehrer teilt folgende 16 Schüler in 8 Gruppen von jeweils zwei Schülern ein.

Alice	Candice	Emily	Gauthier
Amaury	Cindy	Emma	Giulia
Billie	Denis	Farah	Heidi
Brieuc	Diane	Felix	Helena

(a) (2 Punkte) Auf wie viele unterschiedliche Weisen kann er dies machen?
Ihre Antwort darf Produkte oder Fakultäten enthalten.

(b) (1 Punkt) Auf wie viele unterschiedliche Weisen kann er die Schüler einteilen, wenn er genau 6 Gruppen bekommen möchte, in denen die Namen beider Schüler den gleichen Anfangsbuchstaben haben?

(c) (2 Punkte) Auf wie viele unterschiedliche Weisen kann er die Schüler einteilen, wenn er möchte, dass in allen 8 Gruppen die Namen beider Schüler entweder den gleichen Anfangsbuchstaben haben oder, dass sie zwei im Alphabet aufeinander folgende Anfangsbuchstaben haben?
Tipp: Bestimmen Sie zuerst die möglichen Gruppen für die beiden ersten Schüler und machen Sie danach das Gleiche mit den anderen Schülern.

1. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	4	5	4	7	20

Aufgabe 1 **4 Punkte**

(a) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass $\sin 2x = 1 - (\sin x - \cos x)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}} \right) dx$, wobei eine Substitution $u = \sin x - \cos x$ durchgeführt werden kann.

Aufgabe 2 **5 Punkte**

Gegeden: $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

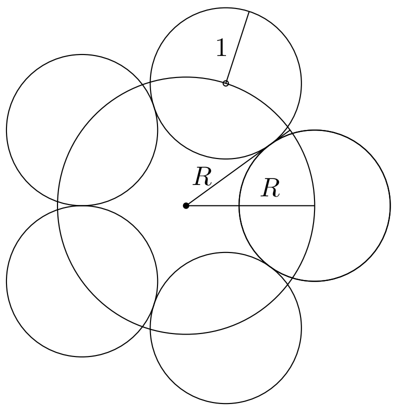
(a) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass $\sin \dfrac{\pi}{10} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, wobei $\sin \frac{3\pi}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{10}\right)$.

(b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass $\sin \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. Verwenden Sie dabei den in 2(a) gegebenen Wert von $\sin \frac{\pi}{10}$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Die Mittelpunkte von 5 Kreisen mit Radius 1 sind auf einem Kreis mit Radius R so verteilt, dass die 5 Kreise paarweise tangential sind, wie in der Zeichnung dargestellt. Berechnen Sie R, indem Sie die Daten von Aufgabe 2 verwenden.

Falls das Ergebnis eine Bruchzahl ist, darf diese im Nenner keine Quadratwurzel enthalten.



Aufgabe 4 ______ **7 Punkte**

Die Funktionen cosh und sinh sind gegeben durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) (2 Punkte) Wir können den Ausdruck

$$13\cosh(x) - 12\sinh(x)$$

als $a\cosh(x-b)$ schreiben, für alle $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie a und b.

Bemerkung für die Aufgaben 4(b), (c) und (d): Wenn Sie die Werte von a und b nicht finden, können Sie die Aufgaben 4(b) und (c) beantworten, indem Sie wissen, dass a und b Lösungen des folgenden Systems sind:

$$ae^{-b} = 1 \qquad \text{und} \qquad 25 = ae^{b}.$$

(b) (2 Punkte) Lösen Sie in $\mathbb{R}$:

$$13\cosh(x) - 12\sinh(x) = 13.$$

(c) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass die Funktion $13\cosh(x) - 12\sinh(x)$ ein Minimum erreicht, wenn $x = \ln 5$.

(d) (1 Punkt) Geben Sie das Minimum der Funktion $13\cosh(x) - 12\sinh(x)$ an.

2024 | **Königliche Militärakademie - Zusätzliche Prüfung POL**
Algebra - Analytische Geometrie - Wahrscheinlichkeitsrechnung
4 Aufgaben - Arbeitszeit 3 Stunden | **Reihe A Teil 2**

1. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	5	5	5	5	20

Aufgabe 1 — **5 Punkte**

Der Rest der Division des Polynoms $p(x)$ durch $(x-2)$ ist 5, und der Rest der Division von $p(x)$ durch $(x-3)$ ist 18. Bestimmen Sie den Rest der Division von $p(x)$ durch $(x-2)(x-3)$.

Aufgabe 2 — **5 Punkte**

Die Gleichungen von zwei Geraden in der Ebene werden gegeben:

$$\begin{aligned} d_1 :&\quad 15x + 8y = 0 \\ d_2 :&\quad 3x + 10y = 0. \end{aligned}$$

Wir geben auch den Punkt $M(-8, 6)$, der die Mitte des Segments $[P_1P_2]$ ist, wobei P_1 ein Punkt von d_1 und P_2 ein Punkt von d_2 ist.

(a) (1 Punkt) Erstellen Sie ein Diagramm, das d_1, d_2, P_1, P_2 und M in einem orthonormalen Koordinatensystem darstellt.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie den Abstand von P_1 zu P_2.

Aufgabe 3 — **5 Punkte**

(a) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass für die komplexe Zahl $z = \cos\theta + i\sin\theta$, wobei $\theta \in \mathbb{R}$, gilt:

$$z^2 + 1 = 2\cos(\theta)z.$$

(b) (3 Punkte) Geben Sie in algebraischer Form $a + bi$ alle komplexen Zahlen mit Modul 1 an, die eine Lösung der Gleichung

$$(5z^2 + 5)^5 + (6z)^5 = 0.$$

Verwenden Sie dabei Aufgabe 3(a).

Aufgabe 4 — **5 Punkte**

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte ganze Zahl zwischen 2000 und 20000 (beide Zahlen nicht inbegriffen) *gerade* ist und aus *verschiedenen Ziffern besteht.* Zum Beispiel: 4052 ist eine solche Zahl, aber nicht 10788 (zweimal die Ziffer 8) oder 6781 (ungerade).

Königliche Militärakademie - Zusätzliche Prüfung POL

2024 | Analysis - Goniometrie - Geometrie | **Reihe B Teil 1**

4 Aufgaben - Arbeitszeit 3 Stunden

1. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	4	5	6	5	20

Aufgabe 1 — **4 Punkte**

(a) (2 Punkte) Stellen Sie im selben Achsensystem den Graphen der folgenden Funktionen dar, wobei $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{1}{1+|x-2|}.$$

(b) (2 Punkte) Geben Sie den maximalen Wert von $\dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-2|}$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 — **5 Punkte**

Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{1+e^x+e^{-x}}dx$$

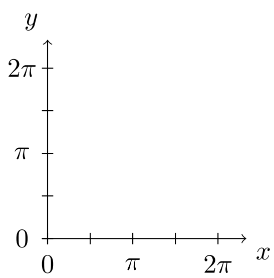
indem Sie eine Substitution $u = e^x$ verwenden.

Aufgabe 3 — **6 Punkte**

(a) (3 Punkte) Lösen Sie im Intervall $[0, 2\pi]$ die folgende Gleichung und stellen Sie die entsprechenden Winkel auf dem trigonometrischen Kreis dar:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$$

(b) (2 Punkte) Lösen Sie die Gleichung $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y$, wenn $x, y \in [0, 2\pi]$ und stellen Sie die Lösungen in der Ebene (x, y) dar, indem Sie ein Achsensystem wie folgendes verwenden. (Zeichen Sie das Achsensystem auf Ihr Antwortblatt.)



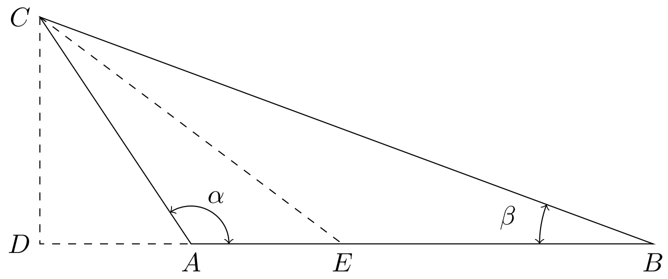
(c) (1 Punkt) Wie viele verschiedene Zahlenpaare (x, y) sind Lösungen des folgenden Systems:

$$\begin{cases} \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0 \\ \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y \end{cases}$$

wenn $x, y \in [0, 2\pi]$? Stellen Sie diese Lösungen dann in einem Achsensystem wie in Frage (b) dar.

Aufgabe 4 **5 Punkte**

Betrachten Sie folgende Abbildung.



Im Dreieck ABC ist D der Schnittpunkt der Höhenlinie ausgehend von C senkrecht zur verlängerten Seite $[AB]$. E ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Winkels $\widehat{ACB}$ und der Seite $[AB]$. Für den Winkel α gilt: $\alpha > 90$.

(a) (1 Punkt) Geben Sie den Winkel $\widehat{DCE}$ in Abhängigkeit von α und β.

(b) (4 Punkte) Beweisen Sie, dass

$$\tan^3 \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = 1$$

wenn $|AD| = |AE|$.

1. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
2. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
3. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2 = \log_e 2$, $\ln 3$, ..., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	6	5	4	5	20

Aufgabe 1 — **6 Punkte**

Das Polynom $p(z) = z^3 + 2z^2 + 7z + 1$ hat die drei Nullstellen z_1, z_2 und z_3 in $\mathbb{C}$.

Bemerkung: Für diese Aufgabe brauchen Sie diese drei Nullstellen nicht zu berechnen.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Vorzeichen der eventuellen reellen Nullstellen von $p(z)$.

(b) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass $z_1 + z_2 + z_3 = -2$. Tipp: Schreiben Sie $p(z)$ in der Form $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$.

(c) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -10$ mithilfe der Teilaufgabe (b).

(d) (1 Punkt) Berechnen Sie $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$. Hinweis: Verwenden Sie die Summe $p(z_1) + p(z_2) + p(z_3)$.

Aufgabe 2 — **5 Punkte**

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie die komplexe Zahl $(1 - i)^6$ in der algebraischen Form $a + bi$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) (2 Punkte) Geben Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}$ der Gleichung $z^6 = 8i$ in algebraischer Form.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie den Wert von $\cos \frac{\pi}{12}$. Verwenden Sie Teilaufgabe 2(b).

Aufgabe 3 — **4 Punkte**

Gegeben: zwei Punkte $A(-6, 0)$ und $B(2, 0)$ in einem Koordinatensystem (x, y) an. Wir interessieren uns für die geometrische Lage aller Punkte P, für die gilt:

$$\frac{|AP|}{|BP|} = 3,$$

wobei die Notation $|XY|$ die Länge des Liniensegments zwischen zwei Punkten X und Y darstellt.

(a) (1 Punkt) Zeichnen Sie eine Figur, die A, B und eine mögliche Position des Punktes P darstellt.

(b) (3 Punkte) Finden Sie die kartesische Gleichung des geometrischen Ortes. Gehen Sie von der in der Aufgabe erwähnten Bedingung aus. Geben Sie die Details der Berechnungen.

Aufgabe 4 — **5 Punkte**

(a) (2 Punkte) Wie viele verschiedene Tabellen mit vier Zeilen und vier Spalten, in denen jedes Feld entweder 0 oder 1 enthält, haben die Eigenschaft, dass die Summe der Felder 8 ist?

(b) (3 Punkte) Wie viele verschiedene Tabellen mit 4 Zeilen und 4 Spalten, in denen jedes Feld entweder 0 oder 1 enthält, haben die Eigenschaft, dass die Summe der Felder in jeder Zeile 2 und, dass die Summe der Felder in jeder Spalte 2 ist?