Königliche Militärakademie - Zusätzliche Prüfung POL

2025 Analysis - Goniometrie - Geometrie **Reihe C Teil 1**

4 Aufgaben - Arbeitszeit 3 Stunden

1. Arbeiten Sie sorgfältig, erklären Sie den Gedankengang und machen Sie detaillierte Berechnungen.
2. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
3. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
4. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2$ und $\sqrt{3}$ in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	5	6	4	5	20

Aufgabe 1 **5 Punkte**

Lösen Sie in $\mathbb{R}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3}\sin x.$$

Aufgabe 2 **6 Punkte**

$\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner als oder gleich x. Zum Beispiel: $\lfloor \pi \rfloor = 3 = \lfloor 3 \rfloor$ und $\lfloor -\frac{8}{9} \rfloor = -1$.

(a) (2 Punkte) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$, für $x \in [1, 4]$.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^4 \left(x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right) dx$.

(c) (2 Punkte) Lösen Sie die Gleichung $3\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

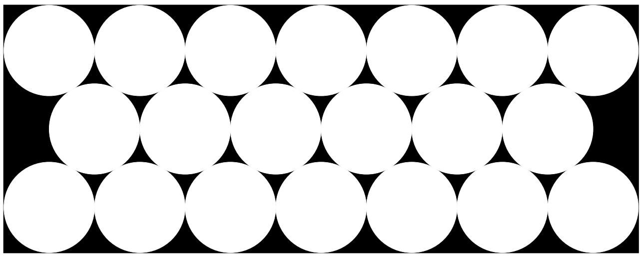
Finden Sie $x > 1$, sodass

$$\frac{\pi}{12} - \int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}} dy = 0.$$

Sie dürfen die Substitution $u^2 = y^2 - 1$ verwenden, um das Integral zu berechnen.

Aufgabe 4 **5 Punkte**

Das folgende Schema zeigt 20 Kreise, die in einem Rechteck angeordnet sind. Die Kreise berühren sich gegenseitig, ebenso die Seiten des Rechtecks, wie auf der Skizze zu sehen ist. Die Kreise haben alle denselben Radius r.



(a) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass die Breite (kleine Seite) des Rechtecks $2(\sqrt{3} + 1)r$ ist.

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie in Abhängigkeit von r den Inhalt der schwarzen Fläche auf der Skizze.

(c) (1 Punkt) Das Verhältnis zwischen der Länge der langen Seite des Rechtecks und der Länge der kurzen Seite des Rechtecks kann geschrieben werden als $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-b\right)$. Bestimmen Sie die natürlichen Zahlen a und b.

1. Arbeiten Sie sorgfältig, erklären Sie den Gedankengang und machen Sie detaillierte Berechnungen.
2. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
3. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
4. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2$ und $\sqrt{3}$ in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	4	4	6	6	20

Aufgabe 1 — **4 Punkte**

Für diese Aufgabe ist z eine komplexe Zahl.

(a) (1 Punkt) Schreiben Sie $\frac{z^5-1}{z-1}$ in Form eines Polynoms, wenn $z \neq 1$. Geben Sie die Schritte Ihrer Berechnung deutlich an.

(b) (3 Punkte) Wir nennen m das Produkt der Lösungen der Gleichung $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, die einen streng positiven Imaginärteil haben. (Die Lösungen, die einen negativen Imaginärteil oder Imaginärteil null haben, spielen also keine Rolle im Produkt m.) Schreiben Sie m in der Form $a + bi$. Hinweis: Verwenden Sie Teilaufgabe 1(a).

Aufgabe 2 — **4 Punkte**

Gegeben ist folgendes Gleichungssystem mit den Unbekannten x und y, wobei a und b zwei von Null verschiedene Parameter sind:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b. \end{cases}$$

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie, ohne das Gleichungssystem zu lösen, das Produkt xy in Abhängigkeit von den beiden Parametern a und b.

(b) (2 Punkte) Lösen Sie das Gleichungssystem bezüglich x und y.
Wenn Sie die Lösung der vorherigen Teilaufgabe nicht gefunden haben, verwenden Sie folgendes Zwischenergebnis: $xy = C$, wobei C eine Konstante ist, und bestimmen Sie damit x und y auch in Abhängigkeit von C.

Aufgabe 3 — **6 Punkte**

Gegeben sind zwei Geraden a und b im Raum mit einem orthonormalen Koordinatensystem:

$$a \equiv 2x - 4 = y - 2 = z \quad \text{und} \quad b \equiv \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 3z \end{cases} .$$

(a) (2 Punkte) Geben Sie die kartesische Gleichung der Ebene an, die parallel zu a ist und b enthält.

(b) (2 Punkte) Geben Sie die kartesischen Gleichungen der Geraden an, die parallel zur x-Achse ist und die Geraden a und b schneidet.

(c) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Punkt $P \in a$ und den Punkt $Q \in b$, sodass die Gerade PQ parallel zur Ebene $0xy$ verläuft und der Abstand zwischen P und Q minimal ist.

Aufgabe 4 ——— **6 Punkte**

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte (n, m) in $\mathbb{R}^2$, deren Koordinaten streng positive ganze Zahlen sind und die beide der folgenden Bedingungen erfüllen:

$$m \leq 2n \leq 4 \quad \text{und} \quad n \leq 2m \leq 4.$$

Stellen Sie au?erdem die beiden Bedingungen und die gefundenen Punkte in einem orthonormalen Koordinatensystem dar.

(b) (2 Punkte) Gleiche Frage mit den folgenden zwei Bedingungen:

$$m \leq 2n \leq 12 \quad \text{und} \quad n \leq 2m \leq 12.$$

(c) (3 Punkte) Gleiche Frage mit den folgenden zwei Bedingungen:

$$m \leq 2n \leq 60 \quad \text{und} \quad n \leq 2m \leq 60.$$

Eine grafische Darstellung ist erlaubt, aber nicht mehr erforderlich.