Königliche Militärakademie - Zusätzliche Prüfung POL

2025 Analysis - Goniometrie - Geometrie **Reihe B Teil 1**

4 Aufgaben - Arbeitszeit 3 Stunden

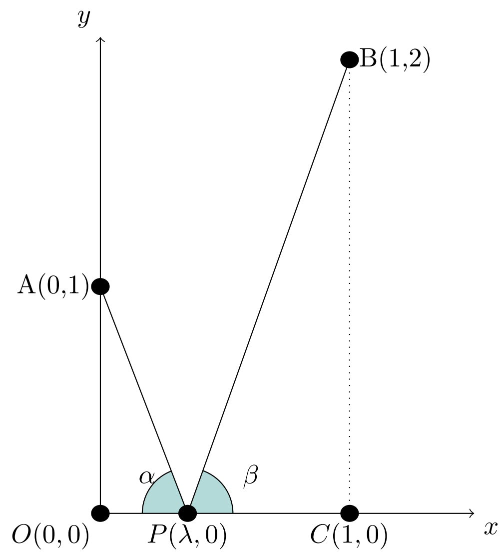
1. Arbeiten Sie sorgfältig, erklären Sie den Gedankengang und machen Sie detaillierte Berechnungen.
2. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
3. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
4. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2$ und $\sqrt{3}$ in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	5	4	5	6	20

Aufgabe 1 **5 Punkte**

In der Ebene sind die festen Punkte $A(0,1)$ und $B(1,2)$, sowie ein variabler Punkt $P(\lambda, 0)$ gegeben, wobei $0 < \lambda < 1$. (Siehe Abbildung.)

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Winkel $\alpha = \widehat{APO}$ und dem Winkel $\beta = \widehat{CPB}$, wenn der Abstand $|AP| + |PB|$ minimal ist ?



Aufgabe 2 **4 Punkte**

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist die Funktion f_n definiert durch

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1+2x}\ \sqrt[4]{1+4x}\ \sqrt[6]{1+6x}\ \ldots\ \sqrt[2n]{1+2nx}}{\sqrt[3]{1+3x}\ \sqrt[5]{1+5x}\ \sqrt[7]{1+7x}\ \ldots\ \sqrt[2n+1]{1+(2n+1)x}}.$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Ableitung von f_1 an der Stelle $x = 0$.

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Ableitung von f_2 an der Stelle $x = 0$.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung von f_{100} an der Stelle $x = 0$.
Beachten Sie, dass für eine positive Funktion f gilt: $f = e^{\ln f}$.

Aufgabe 3 **5 Punkte**

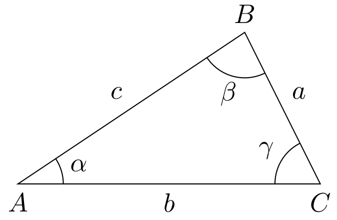
(a) (2 Punkte) Zerlegen Sie in Partialbrüche $\dfrac{1}{(t^2+1)(2t+1)}$.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{2\tan(x)-1}{2\tan(x)+1}dx$ beginnend mit der Variablenänderung $t = \tan(x)$.

Aufgabe 4 **6 Punkte**

Im folgenden Dreieck ABC kennt man das Maß des Winkels bei A und das Verhältnis der Längen der Seiten $[AC]$ und $[AB]$:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \qquad \text{und} \qquad \frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}.$$



(a) (4 Punkte) Berechnen Sie $\tan \dfrac{\beta - \gamma}{2}$. Verwenden Sie das Sinusgesetz.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie β und γ. (Wenn Sie die Antwort auf die vorige Teilaufgabe nicht gefunden haben, gilt: $r = \tan \frac{\beta-\gamma}{2}$, $r > 0$. Geben Sie eine Antwort in Abhängigkeit von r.)

Königliche Militärakademie - Zusätzliche Prüfung POL

2025 Algebra - Analytische Geometrie - Wahrscheinlichkeitsrechnung **Reihe B Teil 2**

4 Aufgaben - Arbeitszeit 3 Stunden

1. Arbeiten Sie sorgfältig, erklären Sie den Gedankengang und machen Sie detaillierte Berechnungen.
2. Die Abbildungen bei den Aufgaben sind rein illustrativ und nicht maßstabsgetreu. Es ergibt also keinen Sinn, sie zu messen.
3. Der Gebrauch von Lehrbüchern und Taschenrechnern ist untersagt. Lineal, Geo-Dreieck, Winkelmesser und Zirkel sind erlaubt.
4. Lassen Sie Symbole und Werte wie π, e, $\ln 2$ und $\sqrt{3}$ in Ihren Ergebnissen unverändert stehen.

Aufgabe	1	2	3	4	**Gesamtnote**
Punkte	4	4	6	6	20

Aufgabe 1 **4 Punkte**

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie in $\mathbb{C}$ die Nullstellen des Polynoms x^2+x+1 und schreiben Sie in trigonometrischer Form als $r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$ mit $r, \theta \in \mathbb{R}$.

(b) (3 Punkte) Wenn n, m, k natürliche Zahlen sind, beweisen Sie, dass das Polynom $x^{3n+2}+x^{3m+1}+x^{3k}$ durch x^2+x+1 teilbar ist.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

(a) (3 Punkte) Stellen Sie grafisch in $\mathbb{R}^2$ die Lösungsmenge S des folgenden Systems dar:

$$\begin{cases} -2x+3y+6 \geq 0 \\ -2x^2+5x+y+3 \geq 0 \\ -x-y^2+4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(b) (1 Punkt) Welches Paar (x, y) in S macht $x-y$ maximal?

Aufgabe 3 **6 Punkte**

Gegeben sind zwei Geraden a und b im Raum mit einem orthonormalen Koordinatensystem:

$$a \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \text{und} \quad b \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad .$$

(a) (1 Punkt) Geben Sie einen Richtungsvektor von a und von b an.

(b) (3 Punkte) Geben Sie die kartesischen Gleichungen der Geraden p an, die die gemeinsame Senkrechte der Geraden a und b ist.

(c) (2 Punkte) Geben Sie die kartesischen Gleichungen einer Geraden q an, die a und die x-Achse schneidet und mit diesen beiden Geraden einen Winkel von 60° bildet. Beginnen Sie mit einer Skizze.

Aufgabe 4 — 6 Punkte

Die Felder des untenstehenden Rasters werden entweder blau oder rot gefärbt, wobei die Farbe für jedes Feld zufällig gewählt wird.

(a) (2 Punkte) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das Gitter zu färben?

(b) (2 Punkte) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es mit mindestens drei roten 2×2 Quadraten? Ein und dasselbe Feld kann zu zwei verschiedenen Quadraten gehören. Also enthält das folgende Gitter zum Beispiel zwei rote 2×2 Quadrate. (Der Buchstabe gibt die Farbe des Feldes an.)

B	B	B
R	R	R
R	R	R

(c) (2 Punkte) Wie viele verschiedene Möglichkeiten enthalten genau ein rotes 2×2 Quadrat? Die anderen Felder können rot oder blau sein. Hier ist ein Beispiel, das die Bedingung erfüllt:

R	R	R
R	R	B
B	B	B